Seminarium – algebra homologiczna

Uczestnicy: Bartosz Naskręcki, Maria Marchwicka, Małgorzata Polaczek, Andrzej Kokosza, Jędrzej Garnek, Łukasz Nizio, Aleksandra Kaim, Mieczysław Krawiarz, Wojciech Wawrów, Łukasz Michalak, Piotr Mizerka, Bartosz Biadasiewicz

- **Wykład 1: teoria kategorii**

  Sugerowana literatura: [Wei94, Appendix A.1-3], [HS97, II]

  Sugerowane dowody: lemat Yonedy (nie musi być w pełnej wersji)

  definicja kategorii, podstawowe przykłady, izomorfizmy, definicja przez własności uniwersalne (obiekt zerowy, produkty, koprodukty, granice proste i odwrotne, *jądra i kojądra – *ostatnie dwa można wprowadzić na kolejnym wykładzie*), kategoria dualna $\mathcal{C}^{opp}$ i zasada dualności, funktory ko- oraz kontrawariantne, przykłady (funktor zapominania), funktor wierny, funktor w pełni wierny, transformacja naturalna i równoważność kategorii, lemat Yonedy, funktory dołączone (przykłady!).

  Wykładowca: Maria Marchwicka **Data:** 19.10.

- **Wykład 2: kategorie addytywne i abelowe. Kompleksy łańcuchowe.**

  Sugerowana literatura: [Wei94, Appendix A.4]

  Sugerowane dowody: konstrukcja długiego ciągu dokładnego.

  kategorie addytywne, jądra i kojądra, kategorie abelowe, monomorfizmy, epimorfizmy, tw. Freyda-Mitchella o zanurzeniu (bez dowodu), przykłady: $R - mod$, *presnopy jako kategoria spełniająca część aksjomatów. Kategoria kompleksów łańcuchowych jako przykład kategorii abelowej. Homologie kompleksu łańcuchowego, quasiizomorfizm, długi ciąg dokładny (szkic konstrukcji np. na podstawie [Wei94, 1.3]),

  Wykładowca: Wojciech Wawrów **Data:** 26.10.

- **Wykład 3: obiekty iniektywne i projektywne**

  Sugerowana literatura: [Wei94, rozdz. 2.2, 2.3] – bez rezolwent,

  Sugerowane dowody: równoważność definicji modułów projektywnych, **Ab** ma dostatecznie dużo obiektów iniektywnych.

  Obiekty projektywne i iniektywne. Moduły projektywne i iniektywne – warunki równoważne (moduł projektywny jako składnik prosty wolnego, *kryterium Baera). Przykład modułu projektywnego, ale nie wolnego (można powiedzieć o tym, że grupa klas to moduły rangi 1 projektywne). Iniektywność nad $\mathbb{Z}$ (moduły podzielne). **Ab** ma dostatecznie dużo obiektów iniektywnych (z dowodem) i projektywnych (z uzasadnieniem).

  Wykładowca: Łukasz Nizio **Data:** 09.11.

- **Wykład 4: funktory pochodne**

  Sugerowana literatura: [Wei94, 2], [HS97, rozdz. 1], [DF04, 10.5].

  Sugerowane dowody: Comparison Theorem [Wei94, Thm. 2.2.6], obliczanie funktorów pochodnych przez rezolwenty acykliczne.

δ-funktory, definicja uniwersalnego δ funktora. Rezolwenta iniektywna i projektywna. Comparison Theorem [Wei94, Thm. 2.2.6]. Warunek dostateczny istnienia rezolwenty projektywnej/iniektywnej (dostatecznie dużo obiektów iniektywnych). Przykłady funktorów prawo/lewodokładnych. Funktory pochodne lewe/prawe, (Weibel), obliczanie funktorów pochodnych przez rezolwenty acykliczne. Funktory effaceable, coeffaceable (kryterium, by funktor był uniwersalnym δ-funktorem).

Wykładowca: Andrzej Kokosza **Data:** 16.11.

- **Wykład 5: Ext-y i Tor-y**

  Sugerowana literatura: głównie trzymać się [Wei94, 3], ale pomocne może być również [DF04, 17.1].

  Sugerowane dowody: przeliczyć kilka przykładów Tor-ów i Ext-ów. Tor i Ext są funktorami lewo- oraz prawopochodnymi ("zbalansowanie").

  definicja Ext-ów i Tor-ów jako funktorów pochodnych, liczenie Extów dla konkretnych grup ("Ext for nice rings"). Rezolwenta płaska jako przykład rezolwenty acyklicznej. Interpretacje Tor-a (jako elementy torsyjne) oraz Ext-a (jako grupa rozszerzeń z sumą Baera – pełny dowód można opuścić). Zbalansowanie Tor-a i Ext-a (z dowodem przez Acyclic Assembly Lemma). Przemienność Tor-a z uzasadnieniem. Wspomnieć twierdzenie o współczynnikach uniwersalnych i formułę Künnetha – dowód zostanie przeprowadzony na innym wykładzie.

  Wykładowca: Piotr Mizerka **Data:** 23.11.

- **Wykład 6: Ciągi spektralne**

  (trochę trudniejszy wykład)

  Sugerowana literatura: dokładnie wg [Wei94]

  definicja ciągu spektralnego, degeneracja,

  ciąg pierwszej ćwiartki

  ciąg spektralny dla podwójnego kompleksu Tot,

  przykłady degeneracji ciągów

  przykłady zerowania się ciągów z [Wei94], Terminologia z [Wei94, rozdz. 5.2],

  Wykładowca: Jędrzej Garnek **Data:** 30.11.

- **Wykład 7: ciąg spektralny Leraya-Serre'a**

  (ciąg ten pozwala liczyć kohomologie rozwłóknień. Temat ciekawy głównie dla topologów)

  Leray-Serre dla rozwłóknień, przykład: odwzorowanie Hopfa

  Wykładowca: Łukasz Michalak **Data:** 07.12.

- **Wykład 8: Ciąg spektralny Grothendiecka**

  (temat jest abstrakcyjny, ale – o dziwo – nie aż tak trudny)

  ciąg spektralny Grothendiecka: [Wei94, rozdz. 5.8], ciąg spektralny pierwszej ćwiartki,

  Wykładowca: Mieczysław Krawiarz **Data:** 14.12.

- **Wykład 9: Ciąg spektralny Leray'a**

  (wdzięczny temat dla osoby, która lubi geometrię algebraiczną)

  kohomologie Cechowskie i porównanie z kohomologiami snopowymi, ciąg spektralny Leraya dla snopów,

  Wykładowca: Aleksandra Kaim **Data:** 11.01.

- **Wykład 10: ciąg Lyndona–Hochschilda–Serre'a**

(zaleta: wykład o dość konkretnych i policzalnych rzeczach)

kohomologie grup, ciąg Lyndona–Hochschilda–Serre'a (powstaje przez podstawienie w ciągu Grothendiecka).

Wykładowca: Małgorzata Polaczek **Data:** 18.01.

- **Wykład 11: formuła Künnetha**

  (Nie jest to bardzo trudny temat. Zastosowanie – liczenie kohomologii produktów przestrzeni)

  twierdzenie o współczynnikach uniwersalnych ([Wei94, Theorem 3.6.1, 3.6.2]) oraz formuła Künnetha – główne odniesienie [Rot09]

  Wykładowca: Bartosz Biadasiewicz **Data:** 25.01.

- **Wykład 12: ciąg spektralny Adamsa**

  ciąg spektralny Adamsa, liczenie homotopii sfer

  Wykładowca: *(prawdopodobnie Zbyszek Błaszczyk)* **Data:** 01.02.

- ~~**Wykład *: pary dokładne Masseya**~~

  ~~*(również motywacja topologiczna)*~~

  ~~**Wykładowca:**~~

- **Wykład 13: Kategorie pochodne**

  kategorie pochodne

  Wykładowca: Bartosz Naskręcki **Data:** 08.02.

Literatura

[DF04] David S. Dummit and Richard M. Foote. *Abstract algebra.* John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, third edition, 2004.

[GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin. *Methods of homological algebra.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[HS97] P. J. Hilton and U. Stammbach. *A course in homological algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[McC01] John McCleary. *A user's guide to spectral sequences*, volume 58 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.

[Rot09] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra.* Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.

[Vak] Ravi Vakil. Spectral sequences: friend or foe? Dostępne na: http://math.stanford.edu/~vakil/0708-216/216ss.pdf.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.