ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB

ZESTAW 0

Rozgrzewka

ZADANIE 1 Znajdź wielomian minimalny liczby $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nad $\mathbb{Q}$ oraz wyznacz jej sprzężenia Galois. Wykaż, że $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

ZADANIE 2 (a) Znajdź wszystkie zanurzenia $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ oraz $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$. Co możesz powiedzieć o obrazach tych zanurzeń?

(b) Wykaż, że jeżeli $L(\alpha)/L$ jest skończonym rozszerzeniem ciał charakterystyki 0, to istnieje $[L(\alpha) : L]$ zanurzeń $\sigma : L(\alpha) \to \overline{L}$, które są L- liniowe.

ZADANIE 3 (a) Wykaż, że $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ jest rozszerzeniem Galois. Wyznacz jego grupę Galois oraz sprawdź na tym przykładzie odpowiedniość Galois.

(b) Znajdź domknięcie Galois rozszerzenia $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ oraz wyznacz jego grupę Galois.

ZADANIE 4 (a) Wykaż „efektywne” twierdzenie o elemencie pierwotnym:

Niech K będzie ciałem charakterystyki 0, zaś $\alpha, \beta \in \overline{K}^{\times}$. Niech też $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ będą sprzężeniami Galois dla α oraz β (gdzie $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$). Wykaż, że jeżeli $\lambda \in K$ spełnia:

$$\alpha_i + \lambda\beta_j \neq \alpha + \lambda\beta \qquad \text{dla } (i, j) \neq (1, 1)$$

to $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + \lambda\beta)$.

Wsk.: pokaż, że istnieje tylko jedno $K(\alpha + \lambda\beta)$-liniowe zanurzenie $K(\alpha, \beta) \hookrightarrow \overline{K}$.

(b) Znajdź dowolny element pierwotny dla ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$.

Teoria Kummera

Załóżmy, że $n \nmid \operatorname{char} K$ oraz $\mu_n = \langle \zeta \rangle \subset K$. Celem poniższego ciągu zadań jest klasyfikacja abelowych rozszerzeń ciała K o wykładniku n.

ZADANIE 1 Wykaż, że dla dowolnego $a \in K$ rozszerzenie $K(\sqrt[n]{a})/K$ jest cykliczne rzędu $d|n$.

(Wsk. rozważ przekształcenie $\sigma \mapsto \zeta_\sigma$, gdzie $\sigma(\sqrt[n]{a}) = \zeta_\sigma \sqrt[n]{a}$.)

ZADANIE 2 Niech L/K będzie rozszerzeniem cyklicznym stopnia n, $\operatorname{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$.

(a) Dla dowolnego $\alpha \in L$ zdefiniujmy REZOLWENTĘ LAGRANGE'A jako:

$$(\alpha, \zeta) := \alpha + \zeta \cdot \sigma(\alpha) + \zeta^2 \cdot \sigma^2(\alpha) + \ldots + \zeta^{n-1}\sigma^{n-1}(\alpha).$$

Wykaż, że jeżeli $(\alpha, \zeta) \neq 0$, to

$$(\alpha, \zeta)^j \in L \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } n|j.$$

(*Wsk. oblicz $\sigma((\alpha, \zeta))$.*)

(b) Wykaż, że $L = K(\sqrt[n]{a})$ dla pewnego $a \in K$.

(*Wsk. skorzystaj z twierdzenia Dedekinda o liniowej niezależności automorfizmów.*)

ZADANIE 3 (a) Wykaż, że następujące przyporządkowanie jest bijekcją:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{skończone podgrupy} \\ \text{grupy } K^\times/(K^\times)^n \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{skończone rozszerzenia abelowe} \\ L/K \text{ o wykładniku dzielącym } n \end{array} \right\} \\ \Delta & \longmapsto & K(\Delta^{1/n}) \\ (L^\times)^n \cap K^\times/(K^\times)^n & \longleftarrow\!\shortmid & L \end{array}$$

oraz że jeżeli Δ odpowiada rozszerzeniu L/K, to $[L : K] = |\Delta|$.

Co stanie się, jeżeli rozważymy podgrupy Δ, które nie są skończone?

(b) Wykaż, że parowanie

$$\operatorname{Gal}(K(\Delta^{1/n})/K) \times \Delta \to \mu_n, \qquad (\sigma, a) \mapsto \frac{\sigma(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}}$$

nie zależy od wyboru $\sqrt[n]{a}$ oraz jest dobrze określone i niezdegenerowanie.
Wywnioskuj, że $\operatorname{Gal}(K(\Delta^{1/n})/K) = \operatorname{Hom}(\Delta, \mu_n)$.
Czy wynika z tego, że $\operatorname{Gal}(K(\Delta^{1/n})/K) \cong \Delta$?
Co wspólnego ma to parowanie z wężem? $\int$

(c) Wywnioskuj z poprzednich podpunktów, że $\operatorname{Hom}_c(G_K, \mu_n) \cong K^\times/(K^\times)^n$.

Wsk. Rozważ $K^{(n)} = K(\sqrt[n]{a} : a \in K)$ i wykaż, że dowolny ciągły homomorfizm $G_K \to \mu_n$ faktoryzuje się przez $G_{K^{(n)}}$.