ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB

ZESTAW 2

---

ZADANIE 1 Niech $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ i niech $I = (2, 1 + \sqrt{-3})$.

(a) Pokazać, że $I \neq (2)$ oraz, że $I^2 = 2I$. Czy pierścień $R$ ma własność JRP?

(b) Dowieść, że $I$ jest jedynym ideałem pierwszym z $R$, który zawiera ideał główny $(2)$.

*(Wsk. wykaż, że jeżeli $(2) \subset P$, to $I \subset P$.)*

(c) Czy ideał $(2)$ ma rozkład na iloczyn potęg ideałów pierwszych z $R$ ?

*(Wsk. skorzystaj z równości z (a).)*

ZADANIE 2 Niech $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, gdzie $d \in \mathbb{Z}$ jest liczbą bezkwadratową.

(a) Wyznaczyć pierścień liczb całkowitych $\mathcal{O}_K$.

(b) Wyznaczyć grupę jedności w $\mathcal{O}_K$ dla $d < 0$.

(c) Jak wygląda grupa jedności w $\mathcal{O}_K$ dla $d > 0$, np. w $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

ZADANIE 3 (a) Wykaż, że jeżeli $q \in \mathbb{Q}$, to $2\cos(q\pi)$ jest liczbą algebraiczną całkowitą.

(b) Niech $q \in \mathbb{Q}$. Wykaż, że $\cos(q\pi) \in \mathbb{Q}$ wtw. gdy $\cos(q\pi) \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, 0\}$.

ZADANIE 4 Wyznaczyć pierścień liczb całkowitych ciała dwukwadratowego $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

*Wsk. Zauważyć, że $\sqrt{6} \in \mathcal{O}_K$. Na początek pokazać, że $\alpha \in K$ jest liczbą algebraiczną całkowitą, wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(\alpha)$ oraz $N_{K/Q(\sqrt{2})}(\alpha)$ są liczbami algebraicznymi całkowitymi. Następnie pokazać, że w ostatnim zdaniu można zastąpić 2 liczbą 3 lub 6 bez zmiany wartości logicznej zdania.*