ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB
ZESTAW 4

$K/\mathbb{Q}$ – ciało liczbowe stopnia n

Wyróżnik elementów $\beta_1, \ldots, \beta_n$: $\Delta_{K/\mathbb{Q}}(\beta_1, \ldots, \beta_n) := \det[\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}(\beta_i\beta_j)]_{i,j}$

Wyróżnik $\mathbb{Z}$-modułu $A \subset K$ rangi n: $\Delta(A) =$ wyróżnik dowolnej $\mathbb{Z}$-bazy A.

$\Delta_K := \Delta(\mathcal{O}_K) \in \mathbb{Z}$

Własności:

1. $\Delta_{K/\mathbb{Q}}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$ wtw. $\beta_1, \ldots, \beta_n$ są liniowo zależne,
2. $\Delta_{K/\mathbb{Q}}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \det[\sigma_i(\alpha_j)]_{i,j}^2$,
3. $\Delta(\mathbb{Z}[\alpha]) = \Delta(\min_{\mathbb{Q}}(\alpha))$,
4. Jeżeli $A \subset B$, to $\Delta(A) = [B : A]^2 \cdot \Delta(B)$.

Zadanie 1 Znajdź pierścień liczb całkowitych i znajdź jego wyróżnik dla $K =$

(a) $\mathbb{Q}(\alpha)$, gdzie $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$,
(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, gdzie d jest liczbą całkowitą bezkwadratową,
(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$,
(d) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Zadanie 2 Niech K będzie ciałem liczbowym i $\Delta := \Delta_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, gdzie $\alpha_i \in \mathcal{O}_K$.

(a) Dowieść, że $sgn(\Delta_K) = (-1)^{r_2}$.
(b) Dowieść, że $\Delta \equiv 0, 1 \pmod 4$. W szczególności, wyróżnik ciała $\Delta_K \equiv 0, 1 \pmod 4$.

Wskazówka do (a). Wyznacznik macierzy $[\sigma_i(\alpha_j)]$ jest sumą $n!$ składników, po jednym składniku dla każdej permutacji z S_n. Niech P (odpowiednio, N) oznacza sumę tych składników, które odpowiadają permutacjom parzystym (odp., nieparzystym). Przy tych oznaczeniach $d = (P - N)^2$. Dowieść, że $P + N, PN \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 3 Niech α będzie liczbą całkowitą algebraiczną o wielomianie minimalnym

$$f(x) = x^n + \sum_i a_i x^i.$$

Załóżmy, że f spełnia założenia twierdzenia Eisensteina dla liczby pierwszej p, tzn. $p|a_i$ oraz $p^2 \nmid a_0$. Wykaż, że $p \nmid [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]]$.

Wsk.: niech $\eta = \frac{1}{p}\sum_i b_i\alpha^i \in \mathcal{O}_K$. Niech $p|b_0, \ldots, b_{j-1}$, $p \nmid b_j$. Co możesz powiedzieć o $N(\alpha^{n-1-j} \cdot \eta)$?

Zadanie 4 Niech $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, gdzie $\alpha^3 - 2\alpha + 3 = 0$. Znajdź $\mathcal{O}_K$ i wykaż, że nie jest postaci $\mathbb{Z}[\beta]$.

(Wsk. Wykaż, że $2|d_{K/\mathbb{Q}}(x)$ dla każdego $x \in \mathcal{O}_K$.)

Zadanie 5 *(Wyznaczanie bazy całkowitej)* Niech K będzie ciałem liczbowym stopnia n, niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$ będą liniowo niezależne nad Q i niech $\Delta := \Delta_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ wybieramy najmniejszą liczbę naturalną d_{ii} taką, że dla pewnych $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ liczba $w_i := \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{i} d_{ij}a_j$ należy do $\mathcal{O}_K$. Wykazać, że układ $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ stanowi bazę całkowitą pierścienia $\mathcal{O}_K$.

Zadanie 6 Wykazać, że jeśli K jest ciałem liczbowym stopnia n i $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathcal{O}_K$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$, to istnieje baza całkowita $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ pierścienia $\mathcal{O}_K$ taka, że $\alpha_j = b_{j1}w_1 + b_{j2}w_2 + ... + b_{jj}w_j$, dla pewnych $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$.