ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB
ZESTAW B

TERMIN ODDANIA ZADAŃ: 12.05.2017

Wyróżniki wielomianów

ZADANIE 1 Wykaż, że wyróżnik wielomianu $x^4 + bx^2 + c$ to $2^4 \cdot c \cdot (b^2 - 4c)^2$. (5 PKT)

ZADANIE 2 Niech $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ będzie wielomianem o parami różnych pierwiastkach. Oznaczmy: $p_k := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$. Wykaż, że:

$$\Delta(f) = \det[p_{i+j-2}]_{i,j}. \qquad \text{(10 PKT)}$$

Wsk. jaki jest związek macierzy z zadania z macierzą Vandermonte'a $[\alpha_i^{j-1}]_{i,j}$? Spróbuj znaleźć ten związek, wyliczając najpierw wyznacznik macierzy Vandermonte'a lub rozważając przypadek $n = 2$.

ZADANIE 3 Wykaż, że wyróżnik wielomianu

$$f(x) := x^n + nx^{n-1} + n \cdot (n-1)x^{n-2} + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot x + n!$$

to $(-1)^{n(n-1)/2} \cdot (n!)^n$. (10 PKT)

Wsk. skorzystaj z wzoru $\Delta(f) = (-1)^{\binom{n}{2}} \cdot \prod_i f'(\xi_i)$, wyprowadzonego na zajęciach. Znajdź zależność między $f(x)$ oraz $f'(x)$.

Obliczanie pierścieni liczb całkowitych

ZADANIE 1 Znajdź $\mathcal{O}_K$ oraz Δ_K, gdzie $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$. (5 PKT)

ZADANIE 2 Wykaż, że $\{1, \theta, \frac{1}{2}(\theta + \theta^2)\}$ jest bazą całkowitą $\mathbb{Q}(\theta)$, $\theta^3 - \theta - 4 = 0$. (5 PKT)

ZADANIE 3 Niech $K = \mathbb{Q}(\theta)$, gdzie $\theta^3 - \theta^2 - 2\theta - 8 = 0$. Niech też $\beta = (\theta^2 + \theta)/2$.

(a) Wykaż, że $1, \theta, \beta$ jest bazą całkowitą $\mathcal{O}_K$ i znajdź Δ_K.

(b) Wykaż, że $2 | \Delta_{K/\mathbb{Q}}(x)$ dla każdego $x \in \mathcal{O}_K$ i wywnioskuj, że $\mathcal{O}_K \neq \mathbb{Z}[\alpha]$.

(10 PKT)

ZADANIE 4 Niech $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{20})$.

(a) Wyznacz pierścień liczb całkowitych oraz wyróżnik ciała K.

(b) Wykaż, że $\mathcal{O}_K \neq \mathbb{Z}[\alpha]$. (*Wsk. bez straty ogólności możesz zapisać α jako $b\sqrt[3]{20} + c\sqrt[3]{50}$. Równanie $\Delta(\alpha) = \Delta_K$ nie ma rozwiązań modulo 7.*) (10 PKT)

Bazy całkowite

ZADANIE 1 (PROSTE) Niech $K/\mathbb{Q}$ będzie ciałem liczbowym stopnia n. Załóżmy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$ oraz że $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Delta_K$. Wykaż, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ stanowią bazę całkowitą $\mathcal{O}_K$. (10 PKT)

Wsk. znajdź indeks odpowiedniej podgrupy abelowej w $\mathcal{O}_K$.

ZADANIE 2 Niech $K \subset L$ będą ciałami liczbowymi.

(a) Wykaż, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ zachodzi: $\mathcal{O}_K \cap k\mathcal{O}_L = k\mathcal{O}_K$.

(b) Wykaż, że dowolną bazę całkowitą $\mathcal{O}_K$ można przedłużyć do bazy całkowitej $\mathcal{O}_L$. (10 PKT)

Wsk. (a): łatwe – skorzystaj z jednej z własności $\mathcal{O}_K$, która ma piękną nazwę. Ad. (b): to jest zadanie z teorii grup. Jaką strukturę grupy mają $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_L$? Jaką strukturę ma $\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K$ – czy może zawierać torsję? Korzystając z projektywności grup postaci $\mathbb{Z}^r$ wykaż, że ciąg dokładny $0 \to \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K \to 0$ rozszczepia się. Jeżeli nie słyszałeś o projektywności – nie szkodzi, doczytaj, to nie trudne.

ZADANIE 3 Niech K będzie ciałem liczbowym. Załóżmy, że $\alpha \in \mathcal{O}_K$ oraz $\alpha \notin k\mathcal{O}_K$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$. Wykaż, że istnieje baza całkowita K zawierająca α. Wywnioskuj, że istnieje baza całkowita zawierająca 1. (10 PKT)

Wsk. to też jest zadanie z teorii grup. Jaką strukturę grupy ma $\mathcal{O}_K$ oraz $\mathcal{O}_K/\langle\alpha\rangle$? Czy $\mathcal{O}_K/\langle\alpha\rangle$ zawiera torsję? Korzystając z projektywności grup postaci $\mathbb{Z}^r$ wykaż, że ciąg dokładny $0 \to \langle\alpha\rangle \to \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/\langle\alpha\rangle \to 0$ rozszczepia się. Jeżeli nie słyszałeś o projektywności – nie szkodzi, doczytaj, to nie trudne.

ZADANIE 4 Niech K będzie ciałem liczbowym o bazie całkowitej $\beta_1, \ldots, \beta_n$, zaś $\alpha \in \mathcal{O}_K$.

(a) Załóżmy, że

$$\alpha\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n.$$

Wykaż, że $|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| = |\det(a_{ij})|$.

(b) Korzystając z (a) wykaż, że $|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| = |\mathcal{O}_K/(\alpha)|$. (10 PKT)

Wsk. (a) czy macierz $[a_{ij}]_{ij}$ można jakoś zinterpretować? Ad. (b) niech $M \leqslant \mathbb{Z}^n$ będzie podgrupą o bazie $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}^n$. Wtedy $\#\mathbb{Z}^n/M$ można obliczyć za pomocą macierzy $[x_1|\ldots|x_n]$ – patrz POSTAĆ NORMALNA SMITHA.

ZADANIE 5 Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie bazą rozdzielczego rozszerzenia L/K, zaś $x_1^*, \ldots, x_n^*$ – bazą dualną. Wykaż, że:

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \Delta(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 1.$$

(10 PKT)

Wskazówki:

1. *Baza dualna to taka, która spełnia* $\langle x_i, x_j^* \rangle \Big(:= \mathrm{tr}_{L/K}(x_i \cdot x_j^*) \Big) = \delta_{ij}$.
2. *Wyraź bazę dualną przy pomocy bazy początkowej:* $x_i^* = \sum_j a_{ij} x_j$ *oraz zastosuj do tej równości* $\langle \cdot, x_k \rangle$. *Jak wygląda macierz przejścia z bazy* x_i *do bazy* x_i^**? Jaki jest jej związek z macierzą przekształcenia dwuliniowego* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *w bazie* x_i*? Jak zachowuje się macierz formy dwuliniowej przy przejściu z jednej bazy do innej?*