

PODSTAWY MATEMATYKI  
ZESTAW 1 – Logika

---

ZADANIE 1 Przedstaw schemat następujących zdań:

- (a) Jeśli dwa trójkąty mają parami równe boki lub parami równe kąty, to są one przystające.
- (b) Prawdziwa sztuka powoduje uniesienie ducha, o ile masz duszę artysty lub jesteś w odpowiednim nastroju.

ZADANIE 2 Określ, jakie związki zachodzą między zdaniami  $p, q$  (warunek konieczny/dostateczny?):

- (a)  $p$  :  $n$  jest liczbą parzystą,  $q$  : suma cyfr liczby  $n$  dzieli się przez 3.
- $q$  :  $n$  jest liczbą podzielną przez 8. (c)  $p$  :  $A$  oraz  $B$  są trójkątami przystającymi,
- (b)  $p$  : liczba  $n$  jest podzielna przez 3,  $q$  :  $A$  oraz  $B$  mają parami równe boki.

ZADANIE 3 Sprawdź, czy podane formuły są tautologiami:

- (a)  $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ , (e)  $(\neg p \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$ ,
- (b)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ , (f)  $(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge r))$ ,
- (c)  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg p \wedge q$ , (g)  $(p \vee q \rightarrow p \vee \neg q) \rightarrow \neg p \vee q$
- (d)  $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ,

ZADANIE 4 (\*) Dla jakich  $n$  wyrażenie  $\underbrace{(\dots((p \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow p)\dots}_{n} \rightarrow p$  jest tautologią?

- ZADANIE 5 (a) Zdefiniuj  $\rightarrow$  za pomocą  $\wedge, \vee, \neg$ . (d) Wykaż, że wszystkie spójniki logiczne można zdefiniować za pomocą strzałki Scheffera:  $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$ .
- (b) Zdefiniuj  $\leftrightarrow$  za pomocą  $\wedge, \vee, \neg$ .
- (c) Zdefiniuj  $\vee$  za pomocą  $\wedge, \neg$ .

ZADANIE 6 Zbuduj schematy zdań (wykorzystując znane operacje arytmetyczne tam, gdzie to potrzebne):

- (a) Piotr ma brata. (f) Istnieją co najwyżej 3 krasnoludki.
- (b) Każdy człowiek ma matkę. (g) Istnieją dokładnie 3 krasnoludki.
- (c) Istnieje matka wszystkich ludzi. (h) Nie istnieje największa liczba naturalna.
- (d) Każdy matematyk jest uczniem pewnego matematyka. (i) Dla każdego  $n$  pomiędzy liczbami  $n$  i  $2n$  istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza.
- (e) Istnieją co najmniej 3 krasnoludki.

ZADANIE 7 Wykaż, że poniższe wyrażenie nie jest tautologią:

$$\exists_x P(x) \wedge \exists_x Q(x) \rightarrow \exists_x (P(x) \wedge Q(x)).$$