

PODSTAWY MATEMATYKI  
ZESTAW 10 – Funkcje trygonometryczne

---

- podstawowe własności i wzory redukcyjne; wartości w kątach  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ .
  - (jedynka trygonometryczna)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,
  - (sinus sumy/różnicy)  $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$ ,
  - (cosinus sumy/różnicy)  $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$ ,
  - (sinus kąta podwojonego)  $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$ ,
  - (cosinus kąta podwojonego)  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ ,
- 

ZADANIE 1 Uprość wyrażenie  $\cos(x - \frac{3\pi}{2})$ ,  $\sin(x + 5\pi)$ , korzystając z wzorów redukcyjnych.

ZADANIE 2 Znajdź wartość wyrażenia  $3 \sin \frac{29}{6}\pi - 3 \operatorname{tg} \frac{13\pi}{4} + 2 \cos \frac{22}{3}\pi, \sin \frac{3\pi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{3}{4}\pi + \operatorname{ctg}(-\frac{23}{4}\pi) + \cos \frac{407}{6}\pi$ .

ZADANIE 3 Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ , wiedząc że  $\sin \alpha = 0,6$ .

ZADANIE 4 Uzasadnij następujące tożsamości trygonometryczne. Tam, gdzie to potrzebne, podaj założenia:

- (a)  $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$ , (c)  $\sin(x + y) \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$ ,  
(b)  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\sin x}$ , (d)  $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$ .

ZADANIE 5 Rozwiąż równania:

- (a)  $\cos 4x = -1$ , (g)  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$   
(b)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ , (h)  $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$   
(c)  $\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = 0$ , (i)  $\sin x + \cos x = 1$ ,  
(d)  $\sin x = -\frac{1}{2}$ , (j)  $\sin 3x = \sin 2x$ ,  
(e)  $4 \cos^2 x + 4 \sin x = 5$ , (k)  $\sin x + |\sin x| = 0$ ,  
(f)  $\sin x + \cos x = 0$

ZADANIE 6 Rozwiąż nierówności:

- (a)  $\sin x \cos x < \frac{1}{4}$ , (d)  $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .  
(b)  $|\sin 2x| < \frac{1}{2}$ , (e)  $\cos^2 x - 5 \cos x < 0$ ,  
(c)  $\operatorname{tg} 2x > \operatorname{tg} x$ , (f)  $\sin x + \cos x > 0$ ,

ZADANIE 7 \* Ciąg  $(x_n)$  dany jest następująco:  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ . Oblicz  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 \dots x_n$ .

Wskazówka: jak obliczyć  $\sin 15^\circ$ ?