

PODSTAWY MATEMATYKI
ZESTAW 12 – Rachunek różniczkowy

PODSTAWOWE WZORY:

- $f(x) \cdot g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
 - $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$,
 - $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$,
 - $(x^a)' = ax^{a-1}$,
 - $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$,
 - $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,
 - $(\sin x)' = \cos x$,
 - $(\cos x)' = -\sin x$,
 - $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
 - $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
-

ZADANIE 1 Oblicz pochodne następujących funkcji:

- (a) $2^x \cdot \sin x$,
- (b) $\sqrt[3]{\sin x}$,
- (c) $\operatorname{tg} x$,
- (d) $\heartsuit \operatorname{ctg} x$
- (e) $\ln \operatorname{tg} \frac{x}{3}$,
- (f) $\heartsuit \arcsin \sqrt{1-5x}$,
- (g) x^x ,
- (h) \sqrt{x} ,
- (i) $\heartsuit x^{x^x}$,
- (j) $\frac{\arcsin x}{e^x}$,
- (k) $\frac{2 \sin^2 x}{3 \cos^2 x}$,
- (l) $(1 + \sqrt{x}) \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

ZADANIE 2 Napisz równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

- (a) $\frac{2x}{1+x^2}$, $P = (\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$,
- (b) $\operatorname{arctg} x^2$, $P = (0, f(0))$,
- (c) \sqrt{x} , $P = (e, f(e))$,
- (d) $\heartsuit \frac{e^x}{x+1}$, $P = (1, f(1))$,
- (e) $\heartsuit \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$, $P = (1, f(1))$.

ZADANIE 3 Zbadaj monotoniczność następujących funkcji:

- (a) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$,
- (b) $\heartsuit f(x) = x \ln x$,
- (c) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$,
- (d) $\heartsuit f(x) = x + \sin x$,
- (e) $\heartsuit f(x) = \frac{x^3}{x-2}$,
- (f) $f(x) = e^x \cos x$.

ZADANIE 4 Znajdź:

- (a) maksimum funkcji $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$ w przedziale $\langle -2, -\frac{1}{3} \rangle$,
- (b) maksimum i minimum funkcji $f(x) = x^2 \ln x$ na przedziale $\langle 1, e \rangle$,
- (c) maksimum i minimum funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$ na przedziale $\langle 0, 2 \rangle$,
- (d) ekstrema lokalne funkcji $f(x) = e^x \sin x$,
- (e) ekstrema lokalne funkcji $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$.

ZADANIE 5 Puszka ma mieć kształt walca o objętości 8π . Wyznacz wymiary puszkii o najmniejszym polu powierzchni całkowitej.

ZADANIE 6 Wyznacz na paraboli $y = -x^2 + 9$ taki punkt o dodatnich współrzędnych, aby styczna do paraboli poprowadzona w tym punkcie ograniczała wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o jak najmniejszym polu.

ZADANIE 7 Figura F jest ograniczona wykresem funkcji $f(x) = x^2 + 2$, prostą $x = 2$ oraz osiami układu współrzędnych. W jakim punkcie wykresu funkcji $f(x)$ należy poprowadzić styczną, aby odcinała od figury F trapez o największym polu?

ZADANIE 8 Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80cm i szerokości 50cm . W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża. Następnie zgięto karton wzdłuż powstałych linii, tworząc w ten sposób prostopadłościenną pudełko. Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.

ZADANIE 9 * Uzasadnij, że $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ dla $x \in (-1, 1)$.

ZADANIE 10 * Znajdź wzór ogólny na n -tą pochodną funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$.