

PODSTAWY MATEMATYKI  
ZESTAW 14 – Kombinatoryka

---

- zasada dodawania i mnożenia,
  - kombinacja - liczba  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego to  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$   
(kolejność:  $\times$ , powtórzenia:  $\times$ ),
  - wariacja z powtórzeniami – liczba  $k$ -wyrazowych ciągów elementów ze zbioru  $n$ -elementowego to  $n^k$   
(kolejność:  $\surd$ , powtórzenia:  $\surd$ ),
  - permutacja – liczba permutacji („poprzestawiań”) zbioru  $n$ -elementowego to  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ,  
(kolejność:  $\surd$ , powtórzenia:  $\times$ ),
  - $k$ -elementowa wariacja bez powtórzeń  $n$ -elementowego zbioru  $A$  – dowolny  $k$ -wyrazowy ciąg różnych elementów zbioru  $A$  – ich liczba to  $\frac{n!}{(n-k)!}$
  - zasada włączeń i wyłączeń:  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 

ZADANIE 1 Mamy do wyboru 2 mieszkania i 3 auta. Na ile sposobów można dokonać wyboru, jeśli:

- mamy wybrać mieszkanie i samochód,
- mamy wybrać mieszkanie lub samochód ?

ZADANIE 2 Obliczyć liczbę takich permutacji liter  $a, b, c, d, e$  i  $f$ , których pierwszym wyrazem jest  $c$ .

ZADANIE 3 Na parterze dziesięciopiętrowego domu do windy wsiadło 8 osób. Obliczyć liczbę sposobów, na jakie osoby te mogą wysiąść z windy (pod uwagę bierzemy tu jedynie numery pięter, na których wysiadają poszczególne osoby).

ZADANIE 4 Na ile sposobów możemy wybrać dwuosobową delegację parlamentu, w skład którego wchodzi 460 posłów i 100 senatorów?

ZADANIE 5 Obliczyć liczbę sposobów skreślenia kuponu w totolotku.

ZADANIE 6 Na ile różnych sposobów można ustawić w szeregu 4 chłopców i 3 dziewczynki tak, aby:

- najpierw stały dziewczynki, a następnie chłopcy,
- pierwszy stał chłopiec,
- 🏠 pierwszy i ostatni stał chłopiec,
- 🏠 żadnych dwóch chłopców nie stało obok siebie.

ZADANIE 7 Obliczyć liczbę różnych słów (sensownych lub nie), które można uzyskać w wyniku przestawiania liter w słowie sasanka.

ZADANIE 8 Obliczyć liczbę takich permutacji liter  $a, b, c, d, e$  i  $f$ , które spełniają dany warunek:

- trzy pierwsze litery tworzą zbiór  $\{b, c, d\}$ ,
- samogłoski  $a$  i  $e$  są sąsiednimi wyrazami permutacji.

ZADANIE 9 (a) Ile różnych przekątnych ma  $n$ -kąąt wypukły?

- Ile nastąpi uścisków dłoni, gdy  $n$  osób wita się „każdy z każdym”?

ZADANIE 10 Na ile różnych sposobów można ustawić w szeregu siedem kobiet i siedmiu mężczyzn tak, aby żadne dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

ZADANIE 11 Ile podzbiorów ma zbiór  $n$ -elementowy?

ZADANIE 12 Ile różnych liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5 (🏠 podzielnych przez 4) można utworzyć z cyfr: 0, 1, 3, 4, 5, jeśli każda cyfra może występować dokładnie raz ?

ZADANIE 13 Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i trzynastu panów utworzyć 10 nienumerowanych (🏠 numerowanych) par tanecznych.

ZADANIE 14 🏠 Na ile sposobów można podzielić 9 różnych przedmiotów pomiędzy 3 osoby tak, aby każda z nich dostała 3 przedmioty?

ZADANIE 15 Na ile sposobów można ułożyć harmonogram klasówek na 15 tygodni, przy założeniu, że w tygodniu mogą być co najwyżej 2 klasówki, a tydzień składa się z 30 godzin lekcyjnych?

ZADANIE 16 🏠 Ile jest różnych  $n$ -wyrazowych ciągów binarnych zawierających co najmniej 3 jedynki?

ZADANIE 17 Na okręgu zaznaczono 6 różnych punktów. Ile różnych wielokątów o wszystkich wierzchołkach w tych punktach, można narysować?

ZADANIE 18 Na ile sposobów można rozmieścić 7 kul ponumerowanych od 1 do 7, w pięciu komórkach ponumerowanych od I do V tak, aby:

- (a) dokładnie jedna komórka była zajęta,
- (b) dokładnie dwie komórki były zajęte,
- (c) 🏠 dokładnie trzy komórki były zajęte?

ZADANIE 19 🏠 Na ile sposobów można usadzić  $n$  osób przy okrągłym stole (dwa sposoby uznajemy za równoważne, jeżeli są takie same po obrocie stołu)?

ZADANIE 20 Ile różnych dzielników naturalnych ma liczba  $2^4 \cdot 3^{72} \cdot 5^{2011}$  ?

ZADANIE 21 W klasie liczącej 33 osoby 17 uczniów uczy się języka włoskiego, 17 uczniów uczy się języka hiszpańskiego i 15 uczniów uczy się języka portugalskiego. Wśród nich 7 uczniów uczy się dwóch języków: włoskiego i hiszpańskiego, 9 uczniów uczy się języka włoskiego i portugalskiego oraz 6 uczniów uczy się języka hiszpańskiego i portugalskiego. Wreszcie 2 uczniów uczy się tych trzech języków. Ilu uczniów nie uczy się żadnego z tych języków?

ZADANIE 22 🏠 Ile jest liczb naturalnych mniejszych niż 1000 podzielnych przez 2, 3 lub 5?

ZADANIE 23 \* Ile jest różnych par  $(A, B)$  podzbiorów zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  takich że  $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}$  (przyjmujemy, że pary  $(A, B)$  oraz  $(B, A)$  są różne dla różnych  $A, B$ )?

ZADANIE 24 \* Na ile różnych sposobów można dojść z punktu  $(0, 0)$  do punktu  $(m, n)$  (gdzie  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ) w każdym ruchu przesuając się o jedną jednostkę w górę lub w prawo?

ZADANIE 25 \* Wykaż, że  $\binom{m+n}{l} = \sum_{j=0}^l \binom{m}{j} \binom{n}{l-j}$ .

ZADANIE 26 \* Wykaż, że zbiór  $\{1, \dots, n\}$  posiada  $n! \cdot \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$  permutacji bez punktów stałych.