PODSTAWY MATEMATYKI
ZESTAW 15 – Rachunek prawdopodobieństwa

- klasyczna definicja prawdopodobieństwa,
- prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia A: $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$,
- prawdopodobieństwo całkowite: jeżeli $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ oraz $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, to

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

- wzór Bayesa: jeżeli $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ oraz $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, to

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Klasyczne prawdopodobieństwo

Zadanie 1 Spośród liczb $1, 2, \ldots, 40$ wybrano losowo jedną liczbę. Przyjmijmy oznaczenia zdarzeń:

- A – wylosowana liczba dzieli się przez 5,
- B – wylosowana liczba dzieli się przez 3.

Obliczyć $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ oraz 🏠 $P(A \cup B)$.

Zadanie 2 Rzucono dwa razy kostką do gry. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

- A – suma liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą,
- B – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą,
- C – suma liczb wyrzuconych oczek jest większa od 7,

Obliczyć: $P(A)$, $P(A \cap C)$, 🏠 $P(B \cap C)$.

Zadanie 3 Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że brydżysta otrzyma w rozdaniu dokładnie

(a) dwa asy i jednego króla,
(b) trzy asy i cztery króle,
(c) 🏠 jednego asa, dwa króle, cztery damy i trzy walety.

Zadanie 4 Na $2n$ miejscach przy okrągłym stole losowo posadzono n kobiet i n mężczyzn. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że na żadnych dwóch sąsiadujących ze sobą miejscach nie usiadły osoby tej samej płci.

Zadanie 5 Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniają warunki: $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{1}{3}$ i $P(B) = \frac{1}{2}$. Obliczyć $P(A \cup B)$.

Zadanie 6 Na parterze 10-piętrowego budynku do windy wsiadło 6 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia, przyjmując, że dla każdej z tych sześciu osób losowy jest numer piętra, na którym ta osoba wysiądzie:

(a) żadne dwie osoby nie wysiądą na tym samym piętrze;
(b) każda osoba wysiądzie na piętrze o numerze parzystym;
(c) 🏠 każda z osób wysiądzie przynajmniej na trzecim piętrze.

Zadanie 7 (Paradoks kawalera de Méré) Przy rzucie trzema kostkami sumę 11 i 12 oczek można uzyskać na tyle samo sposobów. Dlaczego częściej wypada suma 11?

Prawdopodobieństwo geometryczne

Zadanie 8 Na odcinku $[0,1]$ umieszczono dwa punkty x_1, x_2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że $x_1 \leqslant \frac{1}{2}x_2$? Jakie jest prawdopodobieństwo, że $x_1 = \frac{1}{2}x_2$?

Zadanie 9 Dwoje znajomych umawia się w pewnym miejscu. Każdy ma przyjść w dowolnej chwili między godz. 15.00, a 16.00 i czekać na drugiego przez 20 minut. Jakie jest prawdopodobieństwo, że się spotkają?

Zadanie 10 Na przystanku zatrzymują się 3 linie autobusowe, każda kursuje co 15 minut w sposób losowy. Jakie są szanse, że Ania będzie musiała czekać nie więcej niż 5 minut na pierwszy autobus?

Zadanie 11 Kij o długości 1m łamiemy na trzy części. Jakie są szanse, że z otrzymanych odcinków można utworzyć trójkąt?

Zadanie 12 Na odcinku o długości 1 wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległość między nimi nie przekracza a, gdzie $a \in [0,1]$?

Zadanie 13 (Paradoks Bertranda) W okrąg o promieniu 1 wpisano trójkąt równoboczny. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że losowo poprowadzona cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Zadanie 14 Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia przynajmniej jednej szóstki przy dwóch rzutach kostką do gry pod warunkiem, że suma wyrzuconych liczb oczek jest większa od 8.

Zadanie 15 Rzucamy trzema kostkami. Wiadomo, że na każdej kostce wypadła inna liczba oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

(a) na żadnej kostce nie wypadła szóstka,

(b) na pewnej kostce wypadła szóstka?

Zadanie 16 Test na obecność pewnego wirusa ma skuteczność 95%, tzn. jeśli badana osoba jest chora (t.j. zakażona wirusem), to z prawdopodobieństwem 0.95 test daje wynik pozytywny, a jeśli badana osoba jest zdrowa, to z prawdopodobieństwem 0.95 test daje wynik negatywny. Wiadomo, że średnio 1 osoba na 1000 jest zakażona. Jeśli dla osoby wybranej losowo test dał wynik pozytywny, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że osoba ta jest faktycznie chora?

Zadanie 17 Alicja przychodzi do restauracji w losowym momencie między 18.00 a 18.30 z jednakowym prawdopodobieństwem. Podobnie postępuje Bob. Wiadomo, że Bob przyszedł pierwszy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Alicja przyszła przed 18.15?

Prawdopodobieństwo całkowite

Zadanie 18 W pewnej uczelni 78% studentek i 88% studentów umie pływać. Studentki stanowią 60% studiujących w tej uczelni. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba studiująca w tej uczelni umie pływać.

Zadanie 19 Z zawierającej 3 kule białe i 5 kul czarnych pierwszej urny wylosowano kulę i włożono ją do zawierającej 4 kule białe i 9 kul czarnych urny drugiej. Następnie z drugiej urny wylosowano jedną kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że kula ta jest biała.

Zadanie 20 Detale z trzech fabryk stanowią odpowiednio 45%, 35% i 20% zawartości magazynu. Wśród detali z tych fabryk jest 1%, 3% i $2,5\%$ braków odpowiednio. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowany z magazynu detal jest wybrakowany.

Zadanie 21 * Alicja i Bob grają w następującą grę: każde z nich wybiera ciąg dwóch wyników rzutów monetą. Następnie rzucają monetą tak długo, aż pojawi się jeden z nich. Grę wygrywa ta osoba, której ciąg pojawi się jako pierwszy. Ben wybrał ciąg "orzeł–orzeł". Jaki ciąg powinna wybrać Alicja, wiedząc że orzeł wypada z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$? Jakie będzie wtedy prawdopodobieństwo jej wygranej?