PODSTAWY MATEMATYKI

ZESTAW 4 – Ciągi

ZADANIE 1 Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2.

ZADANIE 2 Znajdź postać jawną ciągu zadanego rekurencją $c_n = 4c_{n-1} - 3c_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, $c_0 = 1$, $c_1 = 4$. *(Wsk. jaka jest rekurencja na ciąg $c_n - c_{n-1}$?).*

ZADANIE 3 Zbadaj monotoniczność ciągu. Czy ciąg ten jest ograniczony?

(a) $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$,

(b) $a_n = \frac{2^n}{n!}$,

(c) $a_n = n^3 - 5n$.

ZADANIE 4 Oblicz granicę:

(a) $a_n = -3n^4 + 100n^3 + n^2 - 5$,

(b) $a_n = (-1)^n \cdot (n^{1/3} - \sqrt{n})$,

(c) $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$,

(d) $a_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$,

(e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$,

(f) $a_n = \frac{3+4+\ldots+n}{n^2-2}$,

(g) $a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2}$,

(h) $a_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1}$,

(i) $a_n = n \cdot (\ln(n+1) - \ln n)$,

(j) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin(2n)}{n+1}$,

(k) $a_n = (1 - \frac{1}{2^2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n^2})$,

(l) $a_n = \sqrt[4]{n^4 + 4}$,

(m) $a_n = \sin \frac{2n^2-1}{12n^2+n}\pi$,

(n) $a_n = \frac{\sin n!}{\sqrt{n}}$,

(o) $a_n = \frac{n^{10}}{2^n}$,

ZADANIE 5 * Wykaż, że jeżeli ciąg a_n dany jest poniższą rekurencją, to jest rosnący:

$$a_{2n} = 3a_n - 1, \qquad a_{2n+1} = 3a_n + 1.$$

ZADANIE DOMOWE

1. Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$. Czy jest on ograniczony?
2. Oblicz granice ciągów: $a_n = \frac{(n+2)!-n!}{(n^2+2n)\cdot n!}$, $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, $a_n = \sqrt[n]{4^n + 3 \cdot 5^n - 3^{n+2}}$, $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n+2}$, $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n^2+1}$, $a_n = n^4 + (-1)^n \cdot n$.