

PODSTAWY MATEMATYKI
ZESTAW 8 – Wielomiany i funkcje wymierne

ZADANIE 1 Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $f(x)$ przez $g(x)$

(a) $f(x) = x^4 - x^3 - 34x^2 + 57x - 21, g(x) = x^2 - 6x + 3,$

(b) 🏠 $f(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 3, g(x) = x^2 + x - 1,$

(c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5, g(x) = x - 2,$

(d) 🏠 $f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 20, g(x) = x + 2.$

ZADANIE 2 (a) Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $(x+4)$ jest równa 4, a przy dzieleniu przez $(x-2)$ jest równa -2 . Oblicz resztę z dzielenia wielomianu f przez trójmian kwadratowy $(x^2 + 2x - 8)$.

(b) 🏠 Reszty z dzielenia wielomianu f przez dwumiany $x - 1, x, x + 2$ wynoszą odpowiednio 5, 1, -7 . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu f przez wielomian $x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$.

ZADANIE 3 * Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

ZADANIE 4 * Znajdź wszystkie wielomiany $P \in \mathbb{R}[x]$ takie, że $x \cdot P(x - 1) = (x - 2) \cdot P(x)$.

ZADANIE 5 Jaka jest dziedzina funkcji $\frac{x}{x^3 - x^2 - x - 2}$?

ZADANIE 6 Rozwiąż równanie:

(a) $16x^4 - 24x^3 - 2x + 3 = 0,$

(d) $x^6 + 2x^4 - 31x^2 + 28 = 0,$

(b) $x^{13} - x^{12} - x^7 + x^6 = 0,$

(e) $x^4 + 3x^2 - 5 = 0,$

(c) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0,$

(f) $\left| \frac{1}{x+2} \right| = \left| \frac{2}{x-1} \right|.$

ZADANIE 7 Rozwiąż nierówność:

(a) $(1 - 2x)^3 \cdot (3x + 2)^2 \cdot (x - \frac{1}{2}) > 0$

(e) $\frac{(x-5)(x+6)^3(x+9)}{(x-1)^2(x+2)(x+4)^4} > 0,$

(b) 🏠 $(12x^3 - 16x^2 + 7x - 1)^{10}(-10x^2 + 3x + 1)^5 > 0$

(f) 🏠 $\frac{1}{x-1} + \frac{8}{x+2} \leq \frac{15}{x+5},$

(c) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} \geq 11 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

(d) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 < 0.$

(g) 🏠 $\left| \frac{x-3}{x+1} \right| < \frac{1}{3}.$

ZADANIE 8 (a) Wyznaczyć takie liczby a i b , aby wielomian $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ był podzielny przez dwumian $(x^2 - 1)$.

(b) 🏠 Wyznaczyć całkowite wartości parametru a , dla których wielomian $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 1$ ma dwa różne pierwiastki całkowite.

(c) Wyznaczyć wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $5x^2 - kx + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których różnica jest liczbą z przedziału $(0, 1)$.

ZADANIE 9 Wyznacz rozkład na ułamki proste:

(a) $\frac{x^3 + 6x^2 + 5x + 3}{(x+1)(x+4)},$

(c) $\frac{4x^2 - 17x + 7}{(x-2)^3},$

(e) 🏠 $\frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 1)^2},$

(b) $\frac{x+13}{x^2+5x+4},$

(d) $\frac{5x^3 + 4x^2 - x + 1}{(x+2)^2(x^2 - x + 1)},$

(f) 🏠 $\frac{x^2 + 4x - 1}{(x+1)^3}.$

ZADANIE 10 Rozwiąż nierówność:

$$\frac{1}{x \cdot (x + 1)} + \frac{1}{(x + 1) \cdot (x + 2)} + \frac{1}{(x + 2) \cdot (x + 3)} \leq 0.$$