Podzielności w $\mathbb{Z}$

1. Wykaż, że:

   (a) $a|b \Rightarrow a|bc$,
   (b) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$,
   (c) $a|b \Rightarrow a|(-b)$,
   (d) $a|b \wedge a|c \Rightarrow \forall_{u,v}\, a|bu + cv$.

2. Znajdź resztę z dzielenia:

   (a) 2103 przez 7,
   (b) -151 przez 11,
   (c) -301 przez 13.

3. Wykaż, że:

   (a) jeżeli $11|a + 5b$, to $11|9a + b$,
   (b) jeżeli $7|2a - 3b$, to $7|a + 2b$,
   (c) jeżeli liczba $\frac{2a-3b}{5}$ jest całkowita, to liczba $\frac{a+b}{5}$ również,
   (d) jeżeli liczba $\frac{a-5b}{7}$ jest całkowita, to liczba $\frac{3a+6b}{7}$ również.

4. Udowodnij, że jeżeli ostatnią cyfrą liczby n jest 5, to dwie ostatnie cyfry liczby n^2 to 25.

5. Liczba $a = 151$ przy dzieleniu przez pewną liczbę dodatnią całkowitą b daje iloraz $k = 11$ i resztę r. Znaleźć dzielnik b oraz resztę r.

6. Wykaż, że kwadrat każdej liczby całkowitej nieparzystej daje resztę 1 z dzielenia przez 8.

7. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, liczba $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)$ dzieli się przez 5.

8. Oblicz resztę z dzielenia liczby $a \cdot b$ przez 2020 wiedząc, że liczby a i b dają resztę 1 przy dzieleniu przez 2020.

Indukcja

1. Udowodnij dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}_+$ indukcyjnie równości:

   (a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$,
   (b) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$
   (c) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$
   (d) $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, $q \neq 1$
   (e) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

2. Udowodnij indukcyjnie podzielności:

   (a) $10|11^n - 1$,
   (b) $14|13^n - (-1)^n$,
   (c) $5|2^{4n+1} + 3$,
   (d) $13|n^{13} - n$.

3. Udowodnij indukcyjnie nierówności:

   (a) $n! > 2^n$, dla $n \geqslant 3$,
   (b) $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{\text{n pierwiastków}} < 2$,
   (c) $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ dla $a > -1$, $a \in \mathbb{R}$,
   (d) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.