## Liczby pierwsze i złożone

1. Podaj przykład liczb $m$, $a$, $b$ takich, że $m|a \cdot b$, ale $m \nmid a, b$.
2. Liczba $p$ jest pierwsza i dzieli $a^2 - b^2$. Wykaż, że $p|a - b$ lub $p|a + b$.
3. Wykaż, że jeżeli $a^{2020}|b^{2020}$, to $a|b$.
4. Liczby $a$, $b$ są względnie pierwsze. Wykaż, że jeżeli $a \cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej, to liczby $a$, $b$ również.
5. Ile różnych dzielników ma liczba $n = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{32} \cdot 7^{2020}$?
6. Liczby pierwsze $p$ i $q$, gdzie $p > q$, nazywamy bliźniaczymi, jeżeli $p - q = 2$. Udowodnij, że liczby pierwsze $p$ i $q$, gdzie $p > q$ są bliźniacze wtedy i tylko wtedy, gdy $pq + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.
7. Liczbę naturalną nazywamy BEZKWADRATOWĄ, jeżeli nie dzieli się ona przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od $1$ (przykładowo liczba $6$ jest bezkwadratowa, zaś $12$ – nie, ponieważ $4|12$). Wykaż, że dowolną liczbę naturalną można jednoznacznie zapisać w postaci $a^2 \cdot b$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$, zaś $b$ jest liczbą bezkwadratową.
8. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Wykaż, że $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k}$ nie jest liczbą całkowitą.
9. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, dających resztę $3$ z dzielenia przez $4$.

   (Wsk. Naśladując dowód Euklidesa, załóżmy, że $p_1, \ldots, p_n$ są wszystkimi liczbami pierwszymi dającymi resztę $3$ z dzielenia przez $4$. Rozważ dzielniki pierwsze liczby $4p_1^2 \ldots p_n^2 - 1$)
10. Wykaż, że wszystkie rozwiązania równania $x^2 + y^2 = z^2$ w liczbach całkowitych są postaci $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$ dla pewnych liczb całkowitych $m$, $n$.

    (*Wsk. możemy założyć, że $x, y, z$ są parami względnie pierwsze, dzieląc je przez ich NWD. Pokaż, że jedna z liczb $x, y$ jest parzysta. Rozważ równość $(y/2)^2 = (x-z)/2 \cdot (x+z)/2$ i skorzystaj z zadania 4.*)
11. Liczby $a, b, c$ są całkowite dodatnie, przy czym $a^2+b^2 = c^2$. Dowieść, że $c^2 + \frac{2}{3}ab$ jest całkowita i złożona.
12. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.
13. Wykaż, że dla każdego $n$ istnieje $n$ kolejnych liczb złożonych.

    (*Wsk. rozważ liczby* $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + n + 1$, *gdzie* $(n+1)!$ *oznacza silnię*)