KONGRUENCJE

1. Znajdź reszty z dzielenia:

   (a) 3^{22} przez 23
   (b) 7110^{379} przez 17
   (c) 7077^{377} przez 13 .

2. Wykaż, że:

   (a) $7|2^{n+2}+3^{2n+1}$,
   (b) $21|2^{4^n}+5$,
   (c) $2^{5n+1}+4^{5n+1}-6 \equiv 0 \pmod{31}$.
   (d) $7|2222^{5555}+5555^{2222}$,
   (e) $35|3^{6^n}-2^{6^n}$,
   (f) $5|3^{53}+7^{32}+6^{13}$,
   (g) $7|2^{1988}-4$,
   (h) $13|3^{1974}+5^{1974}$
   (i) $7|2^{n+2}+3^{2n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$,
   (j) $2011^{2^n} \equiv -1 \pmod{2^{n+2}}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
   (k) $n^n - n^2 + n - 1 \equiv 0 \pmod{(n-1)^2}$.

3. Jaka jest cyfra jedności liczby 2^{1000}?

4. Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby $1994 \cdot 1995 \cdot 1996 + 1997^2$ przez 7.

5. Znaleźć, jeśli istnieje, element odwrotny do a modulo n .

   (a) $a = 5, n = 7$,
   (b) $a = 3, n = 9$,
   (c) $a = 35, n = 101$,
   (d) $a = 58, n = 189$,
   (e) $a = 111, n = 1891$.

6. Rozwiąż kongruencję:

   (a) $11x \equiv 5 \pmod{28}$,
   (b) $3x \equiv 2 \pmod{7}$,
   (c) $6x \equiv 4 \pmod{12}$,
   (c′) $9x \equiv 6 \pmod{12}$,
   (d) $5x \equiv 1 \pmod{6}$,
   (e) $12x \equiv 8 \pmod{16}$.

7. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby $99^{99} - 49^{49}$.

8. Udowodnij, że 0 jest ostatnią cyfrą liczby $53^{53} - 33^{33}$.

9. Załóżmy, że liczby $a_1, a_2, ..., a_{2011} \in \mathbb{Z}$ są nieparzyste. Znajdź resztę, jaką daje suma ich kwadratów przy dzieleniu przez 4.

10. Rozwiąż układ kongruencji:

    (a) $\begin{cases} x+2y \equiv 2 \pmod{5}, \\ 3x - y \equiv 3 \pmod{5}, \end{cases}$
    (b) $\begin{cases} 3x-2y \equiv 1 \pmod{7} \\ 4x + y \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$

11. Udowodnij, że jeżeli ostatnią cyfrą liczby n jest 5, to dwie ostatnie cyfry liczby n^2 to 25.

12. Dana jest liczba całkowita a oraz liczba pierwsza p. Wykaż, że jeżeli $5a \equiv 1 \pmod{p}$ i $a \equiv 10 \pmod{p}$, to $a \equiv 3 \pmod{p}$.

13. Znaleźć wszystkie n, takie że $n+2|n^2+3$.

14. Udowodnij, że jeżeli $x \in \mathbb{Z}$, zaś p jest liczbą pierwszą, taką że
    $$x^3 \equiv 2x^2 + 3x \pmod{p}$$
    to co najmniej jedna z liczb $x, x-3, x+1$ dzieli się przez p.

15. Wykaż, że jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $p|a+1$, to $p^{n+1}|a^{p^n}+1$.

16. Wyznacz cztery ostatnie cyfry liczby 5^{5555}.

17. * Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których $11|2^p + 3^p$.

18. * (twierdzenie Wilsona) Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

    (wskazówka: zauważ, że dla dowolnego $x \in \{1, 2, ..., p-1\}$istnieje dokładnie jedno takie $y \in \{1, 2, ..., p-1\}$, że $xy \equiv 1 \pmod{p}$)