Teoria grup

Definicja

1. Ile różnych działań można określić na zbiorze:
   (a) 2-elementowym?
   (b) 3-elementowym?
   (c) n-elementowym?

2. Czy następujący zbiór jest grupą z podanym działaniem? Czy jest to grupa abelowa?
   (a) $G = \mathbb{Q}$, $a \star b = \frac{1}{2}(a+b)$,
   (b) $G = \mathbb{Z}$, $a \star b := a^b$,
   (c) $G = \mathbb{Q}_{>0}$, $a \star b := \sqrt{a \cdot b}$,
   (d) $G = \mathbb{R}_{>0}$, $a \star b := \sqrt{a \cdot b}$,
   (e) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = ax + b,$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ z działaniem składania funkcji,
   (f) $G = \mathbb{Z}[\frac{1}{3}] := \{\frac{a}{3^k} : a, k \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania,
   (g) $G = [0,1]$, $x \star y := x + y - [x+y]$,
   (h) $G = \{5^k : k \in \mathbb{Z}\}$ wraz z działaniem dodawania,
   (i) $G = \{5^k : k \in \mathbb{Z}\}$ wraz z działaniem mnożenia,
   (j) $G = (1, \infty)$ z działaniem $a \star b := ab - a - b + 2$,
   (k) $G = 5\mathbb{Z}$ (liczby podzielne przez 5) z działaniem dodawania,
   (l) $G = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniem dodawania,
   (m) $G = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniem mnożenia.

3. (a) Wykaż, że $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ dla dowolnych elementów grupy $a, b \in G$.
   (b) Oblicz $(abc)^{-1}$ dla danych elementów a, b, c grupy G.

4. Wyznacz grupę izometrii kwadratu. Wskaż element neutralny i elementy odwrotne do wszystkich elementów.

5. Rozwiąż równanie $ax = b$ dla danych $a, b \in G$.

6. Niech e będzie elementem neutralnym grupy G. Wykaż, że jeśli $a^2 = e$ dla dowolnego elementu $a \in G$, to grupa G jest przemienna. Czy jeżeli grupa G jest przemienna, to $a^2 = e$ dla dowolnego elementu a?

7. Niech G będzie grupą. Udowodnij, że równość $(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$ zachodzi dla wszystkich $a, b \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest abelowa.

8. Niech G będzie grupą, zaś $g, h \in G$. Oblicz $(ghg^{-1})^n$.

Podgrupy

1. Czy zbiór $\{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$?
2. Znajdź wszystkie podgrupy grupy:

   (a) $\mathbb{Z}/5$, (b) $\mathbb{Z}/8$, (c) $\mathbb{Z}/12$, (d) $\Phi(8)$, (e) $\Phi(5)$.

3. Czy zbiory:

   (a) $H_1 = \{f = ax : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$,
   (b) $H_2 = \{f = x + b : b \in \mathbb{R}\}$,
   (c) $H_3 = \{f = -x + b : b \in \mathbb{R}\}$

   są podgrupami grupy $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = ax+b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ (z działaniem składania funkcji)?

Izomorfizmy i homomorfizmy

1. Czy grupa $G = (1, \infty)$ z działaniem $a \star b := ab - a - b + 2$ jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}_+, \cdot)$?
2. Które z poniższych grup są izomorficzne z $\mathbb{Z}/6$?

   $\Phi(7)$, $\Phi(9)$, grupa izometrii trójkąta równobocznego, $\Phi(12)$

3. Które z poniższych grup są izomorficzne z $(\mathbb{R}_+, \cdot)$?

   $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$

4. Czy grupa $2\mathbb{Z}$ jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}$?
5. Niech G będzie grupą izometrii rombu niebędącego kwadratem. Czy $G \cong \mathbb{Z}/4$?
6. Czy grupa $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ jest izomorficzna z $(\mathbb{Q}, +)$?

   (*Wsk. załóżmy, że $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$ jest izomorfizmem i niech $g(x_0) = 2$ dla pewnego x_0. Skorzystaj z tego, że 2 nie jest kwadratem liczby wymiernej*)

7. Czy dana funkcja $f : G \to H$ jest homomorfizmem grup?

   (a) $G = H = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$,
   (b) $G = H = \mathbb{R}^\times, \quad f(x) = x^2$,
   (c) $G = \{g(x) = ax + b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid a \neq 0\}$, $H = \mathbb{R}^\times, \quad f(ax + b) = a$,
   (d) $G = \mathbb{R}^\times$, $H = (0, \infty), \quad f(x) = |x|$,
   (e) $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{Z}/n, \quad f(x) = x \mod n$.

8. Niech G będzie grupą. Rozważmy funkcję $f : G \to G$, $f(g) = g^{-1}$. Wykaż, że f jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G jest abelowa.