Wstęp do algebry i teorii liczb

(wytłuszczenie oznacza, że będzie wymagana znajomość dowodu twierdzenia)

1. Liczby całkowite: Podzielność w pierścieniu liczb całkowitych i jej **własności**. **Twierdzenie o dzieleniu z resztą.** Liczby pierwsze i złożone. **Twierdzenie Euklidesa o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych**. **Lemat Euklidesa** oraz **lemat Euklidesa dla liczb pierwszych**. **Sito Erastotenesa. Algorytm Euklidesa**, zasadnicze twierdzenie arytmetyki. Rozwiązywanie równań postaci $ax + by = c$.

2. Kongruencje: Kongruencje i ich **własności**. **Rozwiązywanie kongruencji liniowych z jedną niewiadomą**. Twierdzenia: **małe Fermata**, Eulera, **chińskie o resztach**. Zbiór $\Phi(n)$. Funkcja Eulera i **jej multyplikatywność**. Odwrotność multyplikatywna i **jej istnienie**. **Cechy podzielności**.

3. Grupy: Działanie w zbiorze, własności działań (łączność, przemienność, element neutralny, elementy odwrotne), przykłady (w szczególności działania modulo n). Grupa, pierścień, ciało. **Podstawowe własności grup.** Podgrupa. **Prawo skracania w grupie.** Grupa permutacji S_n. Składanie i odwracanie permutacji, rozkład na cykle i transpozycje oraz parzystość (znak) permutacji.

4. Liczby zespolone: Ciało liczb zespolonych, moduł, argument i sprzężenie oraz postać algebraiczna i **trygonometryczna liczby zespolonej**. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych i wykonywanych działań.**Twierdzenie o iloczynie liczb zespolonych** oraz **wzór de Moivre'a**. Twierdzenie o pierwiastkowaniu liczb zespolonych. Grupa μ_n pierwiastków jedynki. Zasadnicze Twierdzenie Algebry.

Pominięte dowody: zasadnicze twierdzenie arytmetyki, twierdzenie Eulera, rozwiązania równań postaci $ax + by = c$.

1 Przykładowy egzamin

1. Podaj definicję oraz (tam, gdzie oznaczono $(*)$) przykład:
   - grupa, $(*)$
   - podgrupa, $(*)$
   - liczba pierwsza, $(*)$
   - funkcja φ Eulera $(*)$ (przykład wartości w punkcie),
   - n-ta grupa symetrii.

2. (a) Co to znaczy, że $a \equiv b \pmod{n}$?
   (b) Sformułuj jedną z własności kongruencji i udowodnij ją.

3. (a) Sformułuj twierdzenie o rozwiązaniach równania postaci $ax + by = c$ w liczbach całkowitych.
   (b) Rozwiąż równanie $15x + 6y = 9$ w liczbach całkowitych.

4. (a) Zdefiniuj ciało liczb zespolonych.
   (b) Sformułuj wzór de Moivre'a.
   (c) Oblicz $(\sqrt{3} + i)^{2020}$.

5. (a) Sformułuj Małe Twierdzenie Fermata.
   (b) Wykaż Małe Twierdzenie Fermata. Możesz skorzystać z następującego faktu:
   $$\text{jeżeli } p \text{ jest liczbą pierwszą, zaś } 1 \leqslant k \leqslant p-1, \text{ to } p | \tbinom{p}{k}.$$
   (c) W jaki sposób Małe Twierdzenie Fermata wynika z Twierdzenia Eulera?

6. (a) Zdefiniuj n-tą grupę symetrii S_n.
   (b) Oblicz $\sigma \circ \tau^{-1}$ dla $\sigma, \tau \in S_9$:
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 & 5 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 9 & 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$
   (c) Rozłóż σ z poprzedniego podpunktu na cykle rozłączne.

7. (a) Sformułuj cechę podzielności przez 9.
   (b) Udowodnij ją.
   (c) Jaką resztę z dzielenia przez 9 daje liczba 1230945433?