

Wstęp do algebry i teorii liczb – zadania powtórkowe nr 2

Kolokwium będzie obejmowało tematy:

- Małe Twierdzenie Fermata i Twierdzenie Eulera,
- kongruencje liniowe i Chińskie Twierdzenie o Resztach,
- cechy podzielności,
- grupy, podgrupy,
- grupy symetrii, rozkład na cykle i transpozycje,
- liczby zespolone (działania i interpretacja geometryczna – bez potęgowania i pierwiastkowania).

(zadania mogą korzystać również z wiedzy z liceum oraz łączyć wiedzę z różnych tematów).

MOŻLIWE PYTANIA TEORETYCZNE: cechy podzielności (przez liczby 2, 3, 4, 5, 9, 10, 2^r), treść Małego Twierdzenia Fermata, treść Twierdzenia Eulera, treść Chińskiego Twierdzenia o Resztach, definicja $\Phi(n)$ oraz $\varphi(n)$, definicja grupy, podgrupy.

Zad. 1 Rozwiąż układ kongruencji:

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{7} \\ 5x \equiv 2 \pmod{6}. \end{cases}$$

Zad. 2 (a) Wykaż, że liczba daje tą samą resztę z dzielenia przez 125, co liczba złożona z jej 3 ostatnich cyfr.
(b) Jaką resztę daje liczba 82648501727 przy dzieleniu przez 125?

Zad. 3 (a) Podaj definicję zbioru $\Phi(n)$.
(b) Wylicz elementy zbioru $\Phi(30)$.
(c) Oblicz resztę z dzielenia 7^{100} przez 30.

Zad. 4 Niech $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, gdzie $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f_1(x, y) = (x, y), \quad f_2(x, y) = (-x, y), \quad f_3(x, y) = (x, -y), \quad f_4(x, y) = (-x, -y).$$

- (a) Czy G jest grupą wraz z działaniem składania funkcji?
(b) Czy podzbiór $H = \{f_1, f_2\}$ jest podgrupą G ?

Zad. 5 Narysuj na płaszczyźnie zbiór:

$$B := \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) \in (0, \frac{\pi}{2}) \wedge \text{Im}(z^2) = 1\}.$$

Zad. 6 Niech:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 4 & 1 & 7 & 2 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in S_9.$$

- (a) Znajdź rozkład permutacji na cykle rozłączne.
(b) Czy σ jest permutacją parzystą, czy nieparzystą?
(c) Oblicz σ^{-1}, σ^3 .