

Zadanie 10

1. (GRUPA 11) Czy zbiór $(0, \infty)$ z działaniem $a \star b := \sqrt{a \cdot b}$ jest grupą?
2. (GRUPA 12) Czy zbiór $(0, \infty)$ z działaniem $a \star b := (a \cdot b)^2$ jest grupą?
3. (GRUPA 11+12) Rozważmy zbiór $G = \{f_1, \dots, f_6\}$ sześciu funkcji $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, \\ f_2(x) &= \frac{1}{x}, \\ f_3(x) &= 1 - x, \\ f_4(x) &= \frac{1}{1 - x}, \\ f_5(x) &= \frac{x - 1}{x}, \\ f_6(x) &= \frac{x}{x - 1}. \end{aligned}$$

Uzupełnij dwie kolumny tabelki działania składania w tym zbiorze (osoby o nazwiskach zaczynających się na litery od A do I uzupełniają dwie pierwsze kolumny, o nazwiskach od J do P – trzecią i czwartą, pozostali – piątą i szóstą):

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	?	?	?	?	?	?
f_2	?	?	?	f_3	?	?
f_3	?	?	?	?	?	?
f_4	?	?	?	?	?	?
f_5	?	?	?	?	?	?
f_6	?	?	?	?	?	?

Wskazówka: przykładowo $(f_2 \circ f_4)(x) = f_2(f_4(x)) = f_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - x = f_3(x)$.