Hartshorne – Algebraic geometry
Zadania

Jędrzej Garnek

25 stycznia 2020

1. Varieties

Podrozdział 1.1

1.1.1 (a) odwzorowanie $\Phi(P(x,y)) := P(x,x^2)$ indukuje izomorfizm $k[x,y]/(y-x^2) \cong k[x]$. Istotnie, zapisując $P(x,y)$ za pomocą algorytmu dzielenia z resztą jako: $P(x,y) = S(x)+(y-x^2)\cdot T(x,y)$ dostajemy $\Phi(P(x,y)) = S(x)$, więc $P \in \ker\Phi \Leftrightarrow \quad S(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \quad y - x^2|P(x,y)$, czyli $\ker\Phi = (y-x^2)$. Ponadto $\Phi(P(x)) = P(x)$, więc Φ jest "na".

(b) jeżeli $\Psi : k[x,y]/(yx-1) \to k[z]$ byłoby izomorfizmem k-algebr, to $1 = \Psi(1) = \Psi(xy) = \Psi(x)\Psi(y)$, więc $deg(\Psi(x)) = deg(\Psi(y)) = 0$ oraz $im\,\Psi \subset k$ (bo x, y generują $k[x,y]/(yx-1)$ jako k-algebrę) – sprzeczność!

(c) (dla $char\, k \neq 2$) Zauważmy, że odwracalne odwzorowania afiniczne między rozmaitościami (tzn. $x \mapsto ax + by + c$, $y \mapsto a'x + b'y + c'$, $ab' - a'b \neq 0$) indukują izomorfizmy odpowiednich ciał funkcyjnych.

Niech $C : a_2x^2+a_1x+b_2y^2+b_1y+cxy+d = 0$ będzie nierozkładalną krzywą stopnia 2. Wtedy jeżeli $a_2, a_1 \neq 0$, to podstawienia typu $x \mapsto x - \alpha$, $y \mapsto y - \beta$ sprowadzają krzywą do postaci $a_2'x^2 + b_2'y^2 + cxy + d' = 0$. Dalej podstawienie typu $x \mapsto x + \gamma y$ daje postać: $a_2'x^2 + b_2'y^2 + d'' = 0$. Skalując zmienne, dostajemy: $x^2 - y^2 + d''' = 0$, a następnie (zauważmy, że $d''' \neq 0$ – inaczej wyjściowy wielomian byłby rozkładalny) $x^2 - y^2 = 4$. Podstawiając $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$ dostajemy krzywą $uv = 1$.

Jeżeli $a_2 \neq 0$, $a_1 = 0$, to analogiczne podstawienia sprowadzają krzywą do postaci $y = x^2$.

Jeżeli $a_2, a_1 = 0$, $c \neq 0$, to podstawienia typu $x \mapsto x + \alpha$, $y \mapsto y + \beta$ dają krzywą w postaci $C : cxy + d' = 0$, gdzie (tak jak poprzednio) $d' \neq 0$, więc po przeskalowaniu jednej ze zmiennych: $C : xy - 1 = 0$.

1.1.2 Oczywiście $Y = Z((y-x^2, z-x^3))$. Aby wykazać, że Y jest rozmaitością afiniczną wymiaru 1 wystarczy wykazać izomorfizm: $A(Y) = \frac{k[x,y,z]}{(y-x^2,z-x^3)} \cong k[x]$ – jest on indukowany przez odwzorowanie $P(x,y,z) \mapsto P(x,x^2,x^3)$ (dowód jak w 1.1a).

1.1.3 Zauważmy, że:

$$\begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ xz - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 0 - yz = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \right)$$

więc $Y = Z((x,y)) \cup Z((x,z)) \cup Z((x^2-y, z-1))$. Ponadto $k[x,y,z]/(x,y) \cong k[z]$, $k[x,y,z]/(x,z) \cong k[y]$, $k[x,y,z]/(x^2-y,z-1) \cong k[y]$ (izomorfizm jest indukowany przez $P(x,y,z) \mapsto P(x,x^2,1)$) – są to dziedziny całkowitości, więc te trzy zbiory są nierozkładalne.

1.1.9 Składowe nierozkładalności $Z(\mathfrak{a})$ odpowiadają minimalnym ideałom pierwszym zawierającym ideał $\mathfrak{a}$ (tzw. *składowe izolowane*). Niech $\mathfrak{p}$ będzie jednym z tych ideałów. Wtedy z Wniosku 11.16 z Atiyaha-Macdonalda mamy: $ht\,(\mathfrak{p}) \leqslant r$ (szybki dowód: $ht\,(\mathfrak{p}) = \dim(k[x_1,\ldots,x_n]_{\mathfrak{p}}) \leqslant$ ilość generatorów ideału $\mathfrak{p}$-prymarnego $\mathfrak{a}$), zaś z Theorem 1.8A(b) z Hartshorne'a mamy: $\dim(Z(\mathfrak{p})) = \dim(k[x_1,\ldots,x_n]/\mathfrak{p}) = \dim(k[x_1,\ldots,x_n]) - ht\,\mathfrak{p} \geqslant n - r$.

1.1.11 Zauważmy, że $Y = Z(\mathfrak{p})$, gdzie $\mathfrak{p} = \{f \in k[x,y,z] : f(t^3,t^4,t^5) = 0\}$ (w szczególności $\mathfrak{p}$ jest ideałem pierwszym, bo $f(x,y,z) \mapsto f(t^3,t^4,t^5)$ indukuje zanurzenie $k[x,y,z]/\mathfrak{p} \hookrightarrow k[t]$, zaś $k[t]$ jest dziedziną całkowitości).

Mamy: $ht(\mathfrak{p}) = \dim(k[x,y,z]) - dim(k[x,y,z]/\mathfrak{p}) = 3 - dim(k[\overline{x},\overline{y},\overline{z}])$ (gdzie $\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ są obrazami x,y,z w $k[x,y,z]/\mathfrak{p}$). Ale $\overline{x}$ jest algebraicznie niezależne nad k (jeżeli $P(x) \in \mathfrak{p}$, to $P(t^3) \equiv 0$, więc $P \equiv 0$), zaś $\overline{y},\overline{z}$ są algebraicznie zależne nad $k(\overline{x})$ (bo $x^4 - y^3, x^5 - z^3 \in \mathfrak{p}$), co daje:

$$\dim(k[\overline{x},\overline{y},\overline{z}]) = trdim(k(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) : k) = trdim(k(\overline{x})(\overline{y},\overline{z}) : k(\overline{x})) + trdim(k(\overline{x}) : k) = 0 + 1$$

oraz $ht(\mathfrak{p}) = 2$.

Ponadto minimalna liczba generatorów $\mathfrak{p}$ jest niemniejsza od liczby generatorów ideału $P := \mathfrak{p}k[x,y,z]_{\mathfrak{p}}$, czyli $\dim_\kappa(P/P^2)$ (gdzie $\kappa = k[x,y,z]_{\mathfrak{p}}/P$). Aby pokazać, że $\mathfrak{p}$ nie jest generowany przez 2 elementy, wystarczy więc pokazać, że $[xz - y^2], [x^4 - y^3], [y^5 - z^3] \in P/P^2$ są liniowo niezależne nad κ. Niech:

$$(xz - y^2) \cdot A(x,y,z) + (x^4 - y^3) \cdot B(x,y,z) + (y^5 - z^3) \cdot C(x,y,z) \in P^2$$

dla pewnych $A, B, C \in k[x,y,z]_{\mathfrak{p}}$. Wtedy po podstawieniu $(y,z) \mapsto (t^4, t^5)$ wielomian

$$(xt^5 - t^8) \cdot A(x,t^4,t^5) + (x^4 - t^{12}) \cdot B(x,t^4,t^5) + 0 \cdot C(x,t^4,t^5)$$

ma podwójny pierwiastek w $x := t^3$ (bo poprzedni wielomian należał do P^2). Stąd po podzieleniu przez $x - t^3$, stwierdzamy, że wielomian

$$t^5 \cdot A(x,t^4,t^5) + (x^3 + t^3x^2 + t^6x + t^9) \cdot B(x,t^4,t^5)$$

ma pierwiastek w $x := t^3$, więc:

$$t^5 \cdot A(t^3,t^4,t^5) + 4t^9 \cdot B(t^3,t^4,t^5) = 0$$

Analogicznie dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} t^5 \cdot A(t^3,t^4,t^5) & +4t^9 \cdot B(t^3,t^4,t^5) & +0 \cdot C(t^3,t^4,t^5) & = 0 \\ -2t^4 \cdot A(t^3,t^4,t^5) & -3t^8 \cdot B(t^3,t^4,t^5) & +5t^{16} \cdot C(t^3,t^4,t^5) & = 0 \\ t^3 \cdot A(t^3,t^4,t^5) & +0 \cdot B(t^3,t^4,t^5) & + -3t^{10} \cdot C(t^3,t^4,t^5) & = 0 \end{cases}$$

o wyznaczniku:

$$\begin{vmatrix} t^5 & 4t^9 & 0 \\ -2t^4 & -3t^8 & 5t^{16} \\ t^3 & 0 & -3t^{10} \end{vmatrix} = t^5 \cdot t^4 \cdot t^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4t^4 & 0 \\ -2 & -3t^4 & 5t^{12} \\ 1 & 0 & -3t^7 \end{vmatrix} \neq 0$$

więc $A(t^3,t^4,t^5) = B(t^3,t^4,t^5) = C(t^3,t^4,t^5) = 0$ czyli $A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z) \in P$, co daje liniową niezależność.

Podrozdział 1.2

1.2.4 (b) Niech $I := I(Y)$ i załóżmy, że Y jest nierozkładalne. Niech $a \cdot b \in I$. Bez straty ogólności (zastępując a, b przez ich części jednorodne o największej gradacji) możemy przyjąć, że a, b są jednorodne. Wtedy:

$$Y = Z(I(Y)) = (Z(a) \cap Y) \cup (Z(b) \cap Y)\,,$$

zatem z nierozkładalności $Z(a) \cap Y = Y$ lub $Z(b) \cap Y = Y$. Załóżmy, że $Z(a) \cap Y = Y$, tzn. $Y \subset Z(a)$. Wtedy $a \in I(Z(a)) \subset I(Y) = I$, zatem I jest ideałem pierwszym.

1.2.5

(a) Niech $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ będzie dowolnym ciągiem zstępujących domkniętych zbiorów $\mathbb{P}^n$. Z zadania 2.4 (a) ciąg $I_k := I(V_k)$ jest wstępującym ciągiem radykałowych ideałów jednorodnych zawartych w $k[x_0 \ldots, x_n]$. Z noetherowskości ciąg ten musi się stabilizować, więc ciąg $V_k = Z(I_k)$ również.

(b) teza wynika z podpunktu (a) oraz Stwierdzenia 1.5 – zbiory domknięte w $\mathbb{P}^n$ to zbiory algebraiczne, zaś zbiory domknięte nierozkładalne to nierozkładalne algebraiczne zbiory.

1.2.6 Załóżmy, że $Y_i \neq \varnothing$ – wtedy $x_i \neq 0$ w pierścieniu $S(Y)_{x_i}$, więc możemy rozpatrywać lokalizację $S(Y)_{x_i}$. Oznaczmy przez S_0 elementy wagi 0 w pierścieniu z gradacją $S(Y)_{x_i}$.

Zauważmy, że $A(Y_i) \cong S_0$ – istotnie, jeżeli $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ są afinicznymi współrzędnymi, to izomorfizm dany jest przez:

$$A(Y_i) \ni \quad f(X_1, \ldots, X_n) \quad \mapsto \quad f(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) \quad \in S_0$$

(dowolny element S_0 jest z definicji postaci $g(x_1, \ldots, x_n)/x_i^m$ gdzie g jest jednorodny stopnia m, czyli jest równy $g(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i})$ – to daje izomorfizm odwrotny).

Stąd: $S(Y)_{x_i} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_i^k S_0 \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_i^k A(Y_i) = A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}]$.

Zauważmy jeszcze, że $S(Y)_{x_i}$ oraz $S(Y)$ są skończonymi k-algebrami oraz mają to samo ciało ułamków, więc mają ten sam wymiar (jako że dla skończonych k-algebr, będących dziedzinami całkowitości wymiar jest równy wymiarowi przestępnemu). Ponadto $\dim A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}] = \dim A(Y_i) + 1$ (x_i jest przestępny nad $A(Y_i)$). To daje:

$$\dim S(Y) = \dim S(Y)_{x_i} = \dim A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}] = \dim A(Y_i) + 1 = \dim Y_i + 1$$

Stąd $\dim Y_i = \dim S(Y) - 1$ (o ile tylko $Y_i \neq \varnothing$). Pozostaje zauważyć, że $(Y_i)_i$ jest otwartym pokryciem Y, więc z zadania 1.10: $\dim Y = \sup_i \dim Y_i = \dim S(Y) - 1$.

1.2.7

(a) $\dim \mathbb{P}^n =$ (poprzednie zadanie) $\dim S(\mathbb{P}^n) - 1 = \dim k[x_0, \ldots, x_n] - 1 = n$

(b) z dowodu zad. 2.6 wynika, że $\dim \overline{Y} = \dim \overline{Y}_i$, o ile tylko $\overline{Y}_i \neq \varnothing$. Ze stwierdzenia 1.10: $\dim \overline{Y}_i = \dim \overline{Y_i} = \dim Y_i$ (zauważmy, że ϕ_i zadaje homeomofizm między U_i oraz $\mathbb{A}^n$ – stwierdzenie 2.2, więc $\overline{\phi_i(Y)} = \phi_i(\overline{Y})$). Stąd (ponieważ Y_i jest otwartym pokryciem Y) z zadania 1.10: $\dim Y = \sup_i \dim Y_i = \dim \overline{Y}$.

1.2.9

(a) niech $\alpha : k[x_0, \ldots, x_n]_{hom} \to k[y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\beta : k[y_1, \ldots, y_n] \to k[x_0, \ldots, x_n]_{hom}$ będą przekształceniami zdefiniowanymi w Proposition 2.2.

Niech $f \in I(\overline{Y})$ będzie dowolnym wielomianem jednorodnym. Wtedy $\alpha(f)$ należy do $I(Y)$ (bo $\alpha(f)(y_1, \ldots, y_n) = f(1, y_1, \ldots, y_n) = 0$ jako że $(1, y_1, \ldots, y_n) \in \overline{Y}$ oraz $f \in I(\overline{Y})$), więc $f = \beta(\alpha(f)) \in \beta(I(Y))$. Stąd $I(\overline{Y}) \cap k[x_0, \ldots, x_n]_{hom} \subset \beta(I(Y))$, więc (jako że ideał jednorodny jest generowany przez wielomiany jednorodne) $I(\overline{Y}) \subset (\beta(I(Y)))$.

Na odwrót, niech $g \in I(Y)$. Wtedy $\phi_0(Y) \subset Z(\beta(g))$, więc $\overline{Y} = \overline{\phi_0(Y)} \subset Z(\beta(g))$, czyli $\beta(g) \in I(\overline{Y})$. Stąd $\beta(I(Y)) \subset I(\overline{Y})$, więc $(\beta(I(Y))) \subset I(\overline{Y})$.

(b) z zadania 1.1.2:

$$I(Y) = \{f \in k[x, y, z] : f(x, x^2, x^3) = 0\} = (x^2 - y, x^3 - z) = (x^2 - y, xy - z)$$

Niech $J = (x^2 - yw, xy - zw, y^2 - xz)$; wykażemy, że:

(1) $I(\overline{Y}) = \{f \in k[w, x, y, z] : f(a^3, a^2b, ab^2, b^3) \equiv 0$ w pierścieniu $k[a, b]\}$,

(2) $J = I(\overline{Y})$,

(3) $\overline{Y} = Y \cup \{(0 : 0 : 0 : 1)\}$,

(4) $(\beta(x^2 - y), \beta(xy - z)) = (x^2 - yw, xy - zw) \subsetneq J$

ad. (1) Zauważmy, że z podpunktu (a):

$$\begin{aligned} I(\overline{Y}) &= (\beta(I(Y))) = (\{\beta(f) : f(x, x^2, x^3) \equiv 0\}) = \left(\{f \in k[w, x, y, z]_{hom} : f(1, x, x^2, x^3) \equiv 0\}\right) = \\ &= (\text{ z jednorodności}) = \left(\{f \in k[w, x, y, z]_{hom} : f(a^3, a^2b, ab^2, b^3) \equiv 0\}\right) \end{aligned}$$

Zauważmy jednak, że jeżeli $F \in k[w,x,y,z]$ jest wielomianem o częściach jednorodnych $F_0, F_1, \ldots$, to $F(a^3, a^2b, ab^2, b^3) \in k[a,b]$ jest wielomianem o częściach jednorodnych $F_i(a^3, a^2b, ab^2, b^3)$ $(i = 0, 1, \ldots)$, więc

$$F(a^3, a^2b, ab^2, b^3) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall_i \qquad F_i(a^3, a^2b, ab^2, b^3) \equiv 0$$

Stąd:

$$I(\overline{Y}) = \Big(\{f \in k[w,x,y,z]_{hom} : f(a^3, a^2b, ab^2, b^3) \equiv 0\}\Big) = \{f \in k[w,x,y,z] : f(a^3, a^2b, ab^2, b^3) \equiv 0\}$$

ad. (2) Zauważmy, że $J \subset I(\overline{Y}) = \{f \in k[w,x,y,z] : f(a^3, a^2b, ab^2, b^3) \equiv 0\}$. Aby pokazać drugą implikację, niech $f \in I(\overline{Y})$ będzie jednorodny, wtedy $f(1, a, a^2, a^3) \equiv 0$.

Fakt Każdy jednomian przystaje modulo $J = (x^2 - yw, xy - zw, y^2 - xz)$ do jednomianu postaci $z^a w^b$, $x \cdot z^a w^b$ lub $y \cdot z^a w^b$.

Dowód: niech $x^\alpha y^\beta z^\gamma w^\eta$ będzie dowolnym jednomianem. Jeżeli $\alpha \geqslant 2$, to

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma w^\eta \equiv x^{\alpha-2} x^2 y^\beta z^\gamma w^\eta \equiv x^{\alpha-2} \cdot yw \cdot y^\beta z^\gamma w^\eta \equiv x^{\alpha-2} y^{\beta+1} z^\gamma w^{\eta+1} \pmod J$$

– dostajemy więc jednomian o mniejszym $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta - 1$. Analogicznie dla $\beta \geqslant 2$. Jeżeli zaś $\alpha = \beta = 1$, to $xyz^\gamma w^\eta \equiv z^{\gamma+1} w^{\eta+1} \pmod J$.

Z **Faktu** wynika, że f przystaje $\pmod J$ do wielomianu postaci: $P(z,w) + x \cdot Q(z,w) + y \cdot R(z,w)$, gdzie P, Q, R są jednorodne. Ale $P(z,w) + xQ(z,w) + yR(z,w) \in I(\overline{Y})$, więc $P(1, x^3) + xQ(1, x^3) + x^2 R(1, x^3) = 0$. Porównując współczynniki przy potęgach x przystających odpowiednio do $0, 1, 2 \pmod 3$ dostajemy: $P(1, x^3), Q(1, x^3), R(1, x^3) = 0$, więc z jednorodności: $P, Q, R = 0$ oraz $f \in J$.

ad. (3) Zauważmy, że $Z(J) = Y \cup \{(0:0:0:1)\}$. Istotnie:

$$(w:x:y:z) \in Z(J) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = yw \\ x^3 = zw^2 \\ y^3 = wz^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} w \neq 0 \\ (x/w)^2 = y/w \\ (x/w)^3 = z/w \\ (y/z)^3 = w/z \end{array}\right. \text{lub} \left\{\begin{array}{l} w = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1, x/w, y/w, z/w) \in Y \text{ lub } (x:y:z:w) = (0:0:0:1)$$

Ale $I(\overline{Y}) = J$, więc $\overline{Y} = Z(J)$.

ad. (4) Łatwo sprawdzić, że $Z((x^2 - yw, x^3 - zw^2)) = Y \cup \{(0:y:z:0) \in \mathbb{P}^3\} \supsetneq Z(J)$, więc $(\beta(x^2 - y), \beta(x^3 - z)) = (x^2 - yw, x^3 - zw^2) \subsetneq J$.

1.2.10

(a) niech $(a_0, \ldots, a_n) \in k^{n+1}$ oraz niech $f_1, \ldots, f_m$ będą wielomianami jednorodnymi generującymi ideał jednorodny $S(Y)$. Mamy:

$$(a_0, \ldots, a_n) \in C(Y) \quad \Leftrightarrow \quad (a_0 : \ldots : a_n) \in Y \text{ lub } (a_0, \ldots, a_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad \forall_i \quad f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_0, \ldots, a_n) \in Z(I(Y))$$

więc $C(Y) = Z(I(Y))$ oraz $I(C(Y)) = I(Z(I(Y))) = I(Y)$ ($I(Y)$ jest ideałem zbioru algebraicznego, więc $\sqrt{I(Y)} = I(Y)$).

(b) zbiory te mają ten sam ideał, zaś nierozkładalność jest równoważna z pierwszością tego ideału.

(c) $\dim C(Y) = \dim A(C(Y)) = \dim (k[x_0, \ldots, x_n]/I(Y)) = \dim S(Y) =$ (zad. 2.6 + zad. 2.10 a) $= \dim Y + 1$

1.2.12 Przed rozwiązywaniem zadania zauważmy, że:

(Fakt 1) $f(\rho_d(P)) = (\theta f)(P)$.

(Fakt 2) obrazem θ są wielomiany jednorodne stopnia podzielnego przez d i wszystkie ich kombinacje.

Dowód faktu 2: Wystarczy pokazać, że wszystkie jednomiany stopnia $k \cdot d$ należą do obrazu θ, ale to jest oczywiste – dowolny jednomian stopnia $k \cdot d$ jest iloczynem k jednomianów stopnia d, zaś te są obrazami $y_0, \ldots, y_N$.

(a) jeżeli $f(y_0, \ldots, y_N) \in \mathfrak{a}$, to wszystkie części jednorodne wielomianu f należą do $\mathfrak{a}$ – istotnie, wystarczy porównać części tego samego stopnia w równości $0 \equiv \theta(f) = f(M_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, M_N(x_0, \ldots, x_n)) \equiv 0$ (wszystkie jednomiany M_i są stopnia d).

Ponadto $\mathfrak{a}$ musi być ideałem pierwszym – jest jądrem odwzorowania w dziedzinę całkowitości.

(b) **inkluzja** $im\, \rho_d \subset Z(\mathfrak{a})$**:**

– wynika ona z równości: $f(\rho_d(P)) = (\theta f)(P)$.

inkluzja $Z(\mathfrak{a}) \subset im\, \rho_d$**:**

załóżmy, że $R = (y_0, \ldots, y_N) \in V(\mathfrak{a})$. Przenumerowując zmienne, niech $M_i(x_0, \ldots, x_n) = x_i^d$ dla $i = 0, \ldots, n-1$. Wykażemy, że przynajmniej jedna z liczb $y_0, \ldots, y_{n-1}$ jest niezerowa. Istotnie, wielomian $T(Y_0, \ldots, Y_N) = Y_r^d - M_r(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ należy do $\mathfrak{a}$ (bo $T(M_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, M_N(x_0, \ldots, x_{n-1})) = M_r(x_0, \ldots, x_{n-1})^d - M_r(x_0^d, \ldots, x_{n-1}^d) = 0$), więc $y_r^d = M_r(y_0, \ldots, y_{n-1})$ dla dowolnego r i gdyby $y_0 = \ldots = y_{n-1} = 0$, to wszystkie zmienne zerowałyby się.

Bez straty ogólności niech $y_{n-1} \neq 0$. Dla uproszczenia przenumerujmy zmienne tak, by $M_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i^{d-1} x_{n-1}$ dla $i = 0, \ldots, n-1$ (tak by $\frac{M_i(x_0, \ldots, x_{n-1})}{M_n(x_0, \ldots, x_{n-1})} = \frac{x_i}{x_{n-1}}$). Niech $P = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$; wykażemy, że $\rho_d(P) = R$. Istotnie, ustalmy r i niech $M_r(x_0, \ldots, x_n) = x_0^{\beta_0} \ldots x_n^{\beta_n}$. Rozważmy wielomian:

$$W_r(Y_0, \ldots, Y_{N-1}) = Y_r Y_{n-1}^{d-1} - \underbrace{M_r(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})}_{= M_r(\frac{Y_0}{Y_n}, \ldots, \frac{Y_{n-2}}{Y_n}, 1) \cdot Y_{n-1}^d}$$

i zauważmy, że $W_r \in \mathfrak{a}$. Istotnie,

$$W_r(M_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, M_{n-1}(x_0, \ldots, x_n)) = M_r \cdot M_{n-1}^{d-1} - \left((\frac{M_0}{M_{n-1}})^{\beta_0} (\frac{M_2}{M_{n-1}})^{\beta_1} \ldots (\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}})^{\beta_{n-2}} \right) \cdot M_{n-1}^d =$$

$$= M_r \cdot x_{n-1}^{d \cdot (d-1)} - \left((\frac{x_0}{x_{n-1}})^{\beta_0} \cdot (\frac{x_1}{x_{n-1}})^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}})^{\beta_{n-1}} \right) \cdot x_{n-1}^{d^2} = M_r \cdot x_{n-1}^{d \cdot (d-1)} - \left(x_0^{\beta_0} \cdot \ldots \cdot x_{n-2}^{\beta_{n-2}} \right) x_{n-1}^{d^2 - \beta_1 - \ldots \beta_{n-2}} =$$

$$= M_r \cdot x_{n-1}^{d \cdot (d-1)} - \left(x_0^{\beta_0} \ldots x_{n-2}^{\beta_{n-2}} x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \right) \cdot x_{n-1}^{d^2 - d} = 0$$

więc ponieważ $R \in Z(\mathfrak{a})$, to $W_r(R) = 0$, czyli $y_r = \frac{1}{y_{n-1}} M_r(P)$, co daje $R = (\frac{1}{y_{n-1}} M_0(P), \ldots, \frac{1}{y_{n-1}} M_N(P)) = (M_0(P), \ldots, M_N(P)) = \rho_d(P)$.

(c) mamy:

- ρ_d **jest różnowartościowe:** niech $P = (p_0, \ldots, p_n), Q = (q_0, \ldots, q_n) \in \mathbb{P}^n$ oraz $\rho_d(P) = \rho_d(Q)$. Niech bez straty ogólności: $p_0 \neq 0$, $M_i = x_i^d$, $M_{n+i} = x_i^{d-1} x_0$ $(i = 0, \ldots, n)$ – wtedy porównując współrzędne w równości $\rho_d(P) = \rho_d(Q)$ dostajemy: $p_i^d = q_i^d$ (w szczególności $q_0 \neq 0$), $p_i^{d-1} p_0 = q_i^{d-1} q_0$ – dzieląc te dwie równości dostajemy $p_i / p_0 = q_i / q_0$, więc $P = Q$.
- ρ_d **jest ciągłe:** obrazy zbiorów domkniętych są domknięte: $\rho_d^{-1}(Z(I)) = Z(\theta(I))$ – istotnie:

$$P \in Z(\theta(I)) \Leftrightarrow \forall_{f \in I} (\theta f)(P) = 0 \Leftrightarrow \forall_{f \in I} f(\rho_d(P)) = 0 \Leftrightarrow \rho_d(P) \in Z(I) \Leftrightarrow P \in \rho_d^{-1}(Z(I))$$

- ρ_d **jest domknięte:** mamy $\rho_d(Z(J)) = Z(\theta^{-1}(J))$ – istotnie, dla $\rho_d(P) \in \rho_d(Z(J))$ mamy:

$$\forall_{f \in \theta^{-1}(J)} \quad f(\rho_d(P)) = (\theta(f))(P) = 0 \Rightarrow \rho_d(P) \in Z(\theta^{-1}(J))$$

  Na odwrót, niech $R \in Z(\theta^{-1}(J))$, zaś $f \in J$ będzie jednorodny. Mamy: $Z(\theta^{-1}(J)) \subset Z(\mathfrak{a}) = im\, \rho_d$, więc $R = \rho_d(P)$. Z **Faktu 2** mamy $f^d = \theta(g)$ dla pewnego $g \in \theta^{-1}(J)$. Mamy więc: $R = \rho_d(P) \in Z(\theta^{-1}(J))$ $\Rightarrow$ $0 = g(\rho_d(P)) = \theta(g)(P) = f^d(P)$, więc $f(P) = 0$ oraz $P \in Z(J)$, $R \in \rho_d(Z(J))$.

(d) w zadaniu 1.2.9 wykazałem, że $I(\overline{Y}) = \{f \in k[w, x, y, z] : f(a^3, a^2 b, a b^2, b^3) \equiv 0$ w pierścieniu $k[a, b]\}$, zaś zbiór po prawej stronie to $\ker \theta$. Stąd: $\overline{Y} = Z(I(\overline{Y})) = Z(\ker \theta) = im\, \rho_d$.

1.2.13 Niech $C \subset \mathbb{P}^2$ będzie przeciwobrazem Z – wtedy C jest również krzywą (wymiar jest własnością topologiczną, nie zmienia się przy homeomorfizmach), jest więc hiperpowierzchnią w $\mathbb{P}^2$, musi więc być zadany przez pojedyncze równanie (co wynika np. z zad. 2.8): $C = Z((f))$, gdzie f jest jednorodny oraz bez straty ogólności ma parzysty stopień (możemy zastąpić f przez f^2). Z poprzedniego zadania wynika jednak, że obraz C to $Z(\theta^{-1}((f)))$ oraz że obrazem θ są kombinacje wielomianów jednorodnych stopni podzielnych przez 2. Stąd $f = \theta(g)$, więc $\theta^{-1}((f)) = \theta^{-1}((f))$ – istotnie, oczywiście $\theta^{-1}((f)) \supset (g) + \ker\theta$, zaś jeżeli $h \in \theta^{-1}((f))$, tzn. $\theta(h) = af$, to (patrząc na stopnie części jednorodnych) $a \in im\,\theta$, $a = \theta(A)$ oraz $\theta(h - A\cdot g) = \theta(h) - af = 0$, więc $h - A\cdot g \in \ker\theta$, $h \in (g) + \ker\theta$.

Stąd: $Z = Z(\theta^{-1}((f))) = Z((g) + \ker\theta) = Z((g)) \cap Z(\ker\theta) = Z((g)) \cap Y$.

1.2.15

(a) z zadania 2.14 wystarczy wykazać, że $Q = \ker\mathfrak{a}$, tzn. że

$$\ker\Big(P(x,y,z,w) \mapsto P(XZ, YW, XW, YZ)\Big) = (xy - zw)$$

Inkluzja $\ker(P(x,y,z,w) \mapsto P(XZ,YW,XW,YZ)) \supset (xy - zw)$ jest oczywista. Załóżmy, że $P(XZ,YW,XW,YZ) = 0$ – wtedy wszystkie części jednorodne P spełniają to samo równanie (wystarczy porównać części jednorodne obu stron), więc bez straty ogólności można założyć, że P jest jednorodny. Wtedy jednak podstawiając $(X,Y,Z,W) := (z,1,w,1)$ w równości $P(XZ,YW,XW,YZ) = 0$ mamy: $P(wz,1,z,w) = 0$, czyli wielomian $P(x,1,z,w) \in k[z,w][x]$ ma pierwiastek w $x = zw$ oraz $P(x,1,z,w) = (x - zw)\cdot R(x,z,w)$, czyli ujednorodniając: $P(x,y,z,w) = (xy - zw)\cdot \widetilde{R}(x,y,z,w) \in (xy - zw)$.

(b) Niech:

$$L_{(x_0:z_0)} = Z(x_0y - z_0w, xz_0 - zx_0)$$
$$M_{(x_0:w_0)} = Z(x_0y - zw_0, xw_0 - wx_0)$$

– wtedy L_t, M_t są prostymi (izomorfizm z $\mathbb{P}^1$ dany jest przez $L_t \ni (x:y:z:w) \mapsto (y:w) \in \mathbb{P}^1$), są zawarte w Q ($(x:y:z:w) \in L_{(a:1)} \Rightarrow \quad ay = w,\ x = az \Rightarrow \quad xy = azy = zw$) a ponadto dla $a \neq b$ $L_{(a:1)} \cap L_{(b:1)}$ jest zbiorem rozwiązań układu:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ay &=& w \\ x &=& az \\ by &=& w \\ x &=& bz \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (b-a)\cdot y &=& 0 \\ (b-a)\cdot z &=& 0 \\ by &=& w \\ x &=& bz \end{array}\right. \Rightarrow \text{ (ponieważ } b - a \neq 0) \Rightarrow x = y = z = w = 0$$

–układ nie ma więc rozwiązań w $\mathbb{P}^3$. Podobnie pokazujemy, że $L_{(a:1)} \cap L_{(1:0)} = \varnothing$.

Układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ay &=& w \\ x &=& az \\ by &=& z \\ x &=& bw \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& aby \\ z &=& by \\ w &=& ay \end{array}\right. \Leftrightarrow (x:y:z:w) = (ab:1:b:a)$$

pokazuje zaś, że $L_{(a:1)} \cap M_{(b:1)} = \{(ab:1:b:a)\}$

(c) Z zadania 2.9 widzimy, że "twisted cubic curve" jest zawarte w Q, ale jest różne od L_t, M_t (łatwo to sprawdzić, obliczając np. przekrój tych krzywych z równań). Stąd $\Psi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to Q$ nie jest homeomorfizmem (inaczej wszystkie krzywe w Q byłyby postaci L_t lub M_t)

1.2.17

(a) niech $\mathfrak{p} := I(Y)$, $R := k[x_0,\ldots,x_n]_{\mathfrak{p}}$. Wtedy: $\sqrt{\mathfrak{a}} = I(Z(\mathfrak{a})) = \mathfrak{p}$, więc ideał $\mathfrak{a}R$ jest $\mathfrak{p}$–radykałowy; w szczególności (z jednej z definicji wymiaru pierścienia lokalnego): $q =$ ilość generatorów $\mathfrak{a} \geqslant$ ilość generatorów $\mathfrak{a}R \geqslant \dim R$ Stąd:

$$\dim Y = \dim S(Y) - 1 = (\dim k[x_0,\ldots,x_n] - 1) - \dim R = n - \dim R \geqslant n - q$$

(b) (por. http://mathoverflow.net/q/15584/)

Lemat Niech $I \trianglelefteq k[x_0, \ldots, x_n]$ będzie wielomianem jednorodnym. Jeżeli I jest generowany przez s elementów, to jest również generowany przez s elementów **jednorodnych**.

Dowód: Niech $I = (f_1, \ldots, f_r)$ będzie minimalnym zbiorem generatorów jednorodnych I. Oznaczmy: $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_n)$, $A = k[x_0, \ldots, x_n]_{\mathfrak{m}}$. Zauważmy, że A jest pierścieniem z gradacją – elementy jednorodne stopnia d są postaci f/g, gdzie f jest jednomianem stopnia d, zaś $g \notin \mathfrak{m}$. Rozważmy przekształcenie:

$$M := \bigoplus_{k=1}^{r} A \to I \to 0, \qquad (y_i) \mapsto \sum_i y_i f_i$$

i niech $K := \ker(M \to I)$. Zauważmy, że $K \subset \mathfrak{m}M$. Istotnie, w przeciwnym wypadku istniałoby $(a_0, \ldots, a_r) \in M$ takie, że $\sum_i a_i f_i = 0$ oraz indeks i taki, że $a_i \notin \mathfrak{m}$. Bez straty ogólności $i = 1$. Wtedy jednak:

$$f_1 = -\sum_{j \geqslant 2} \frac{a_j}{a_1} f_j,$$

przecząc minimalności $(f_1, \ldots, f_r)$ (zauważmy, że $I \subset \mathfrak{m}$, więc minimalna liczba generatorów jednorodnych jest taka sama nad $k[x_0, \ldots, x_r]$ oraz nad A). Stąd $K \subset \mathfrak{m}M$.

Tensorując ciąg dokładny

$$0 \to K \to M \to I \to 0$$

przez $k = A/\mathfrak{m}$ dostajemy (jako że $K \subset \mathfrak{m}M$) $M \otimes_A k \cong I \otimes_A k$, czyli:

$$\dim_k M \otimes_A k = \dim_k I \otimes_A k.$$

Z lematu Nakayamy:

$$\dim_k I \otimes_A k = \text{ minimalna liczba generatorów } I \ = s.$$

$$\dim_k M \otimes_A k = r.$$

To kończy dowód.

Załóżmy, że $I(\overline{Y}) = (f_1, \ldots, f_{n-r})$ dla pewnych wielomianów jednorodnych f_i – wtedy: $Y = Z((f_1, \ldots, f_{n-r})) = Z((f_1) + \ldots + (f_{n-r})) = \bigcap_{i=1}^{n-r} Z((f_i))$.

(c) Niech: $H_1 = Z(x^2 - yw)$, $H_2 = Z(z^2 w + y^3 - 2xyz)$. Wtedy:

$$(0 : x : y : z) \in H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= 0 \\ 0 + y^3 &= 2xyz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow [0 : x : y : z] = [0 : 0 : 0 : 1]$$

oraz

$$(x : y : z : 1) \in H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= y \\ z^2 + y^3 &= 2xyz \end{cases} \Leftrightarrow (x : y : z : 1) \in H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= y \\ z^2 + y^3 &= 2xyz \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= y \\ z^2 + x^6 &= 2x^3 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= y \\ (z - x^3)^2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= y \\ z &= x^3 \end{cases} \Leftrightarrow (x : y : z : 1) \in Y$$

więc $H_1 \cap H_2 = Y \cup \{(0 : 0 : 0 : 1)\} = \overline{Y}$.

Z drugiej strony, $I(\overline{Y}) = (x^2 - yw, xy - zw, y^2 - xz)$ nie może być wygenerowane przez 2 elementy. Istotnie, załóżmy nie wprost, że $I(\overline{Y}) = (A(w, x, y, z), B(w, x, y, z))$. Niech A_i, B_i będą częściami jednorodnymi stopnia i dla A, B. Zauważmy, że $A_0, A_1, B_0, B_1 = 0$ (ideał $I(\overline{Y})$ jest jednorodny i nie występują w nim elementy stopnia < 2, bo wszystkie jego generatory są stopnia 2). Niech $x^2 - yw = F^{(1)}(w, x, y, z) \cdot A + F^{(2)}(w, x, y, z) \cdot B$ – wtedy biorąc części jednorodne stopnia 2 dostajemy:

$$x^2 - yw = (x^2 - yw)_2 = (F^{(1)}(w, x, y, z) \cdot A + F^{(2)}(w, x, y, z) \cdot B)_2 = f_1 \cdot A + f_2 \cdot B$$

gdzie $f_i = F^{(i)}(0,0,0,0) \in k$ są wyrazami wolnymi wielomianów F_i. Analogicznie:

$$xy - zw = g_1 \cdot A + g_2 \cdot B$$

$$y^2 - xz = h_1 \cdot A + h_2 \cdot B$$

dla pewnych $g_i, h_i \in k$. Reasumując: $Span_k(x^2 - yw, xy - zw, y^2 - xz) \subset Span_k(A, B)$, więc $x^2 - yw, xy - zw, y^2 - xz$ powinny być liniowo zależne nad k. To jednak nie jest możliwe, bo wielomiany te składają się z różnych jednomianów.

Podrozdział 1.3

1.3.1 **Fakt** Dowolny zbiór skończony w $\mathbb{A}^n$ jest domknięty. Zbiory domknięte w $\mathbb{A}^1$ to dokładnie zbiory skończone.

Dowód: Aby pokazać pierwsze stwierdzenie, wystarczy zauważyć, że punkty są domknięte – ale $(a_1, \ldots, a_n) = Z((x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n))$.

Dowolny zbiór domknięty w $\mathbb{A}^1$ jest postaci $Z(I)$ dla pewnego ideału I. Ale $k[x]$ jest dziedziną ideałów głównych, więc $I = (f)$ dla pewnego $f(x) = a \cdot (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) \in k[x]$ – wtedy $Z(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

(a) z zadania 1.1 wiemy, że dowolna krzywa stożkowa jest izomorficzna z krzywą $C_1 : y = x^2$ lub $C_2 : xy = 1$. Pierwsza z tych krzywych jest izomorficzna z $\mathbb{A}^1$ – izomorfizmy są dane przez:

$$C_1 \ni [x, y] \mapsto x \in \mathbb{A}^1$$

$$\mathbb{A}^1 \ni x \mapsto [x, x^2] \in C_1$$

zaś druga z $\mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$ – izomorfizmy to:

$$C_2 \ni [x, y] \mapsto x \in \mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$$

$$\mathbb{A}^1 \backslash \{0\} \ni x \mapsto [x, 1/x] \in C_2$$

(b) załóżmy nie wprost, że $\mathbb{A}^1 \cong U$ – wtedy z **Faktu:** $U = \mathbb{A}^1 \backslash \{P_1, \ldots, P_n\}$. Wystarczy więc dowieść, że $k[x] = A(\mathbb{A}^1) \ncong \mathcal{O}(U) = k[x]_S$, gdzie $S = k[x] \backslash \bigcup_i \mathfrak{m}_{P_i}$ jest zbiorem multyplikatywnym. To jest jednak oczywiste – jeżeli $\Phi : k[x]_S \to k[x]$ byłoby izomorfizmem k-algebr, to $\Phi(\frac{1}{x-a}) = \frac{1}{\Phi(x)-a}$, więc $\deg \Phi(x) = 0$ oraz $im\, \Phi \subset k$ – sprzeczność kończy dowód.

(c) niech Y będzie stożkową w $\mathbb{P}^2$, zaś Y' jej dowolną niepustą afiniczną częścią. Wtedy z zadania 1.1 Y' jest izomorficzna z krzywą $y = x^2$ lub $xy = 1$ – stąd $Y = \overline{Y'}$ jest izomorficzne z krzywą $yz = x^2$ lub $xy = z^2$. Wystarczy więc zauważyć, że $C : xy = z^2$ jest izomorficzne z $\mathbb{P}^1$ – izomorfizmy dane są przez:

$$\Phi : \mathbb{A}^1 \to C, \qquad \Phi(s, t) = (s^2, t^2, st)$$

$$\Psi : C \to \mathbb{A}^1, \qquad \Psi(x, y, z) = \begin{cases} (x, z) & \text{dla } x \neq 0 \\ (z, y) & \text{dla } y \neq 0 \end{cases}$$

(d) założmy nie wprost, że $\Psi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2$ jest homeomorfizmem. Niech C_0, C_1 będą dowolnymi krzywymi w $\mathbb{A}^2$ takimi, że $C_0 \cap C_1 = \varnothing$ (np. $C_0 : x = 0$, $C_1 : x = 1$). Wtedy $\Psi(C_i)$ muszą być krzywymi w $\mathbb{P}^2$, spełniającymi $\Psi(C_0) \cap \Psi(C_1) = \varnothing$. To jest jednak niemożliwe – sprzeczność z zadaniem 3.7 (a).

(e) załóżmy, że $Y \cong X$, gdzie Y jest rozmaitością afiniczną, zaś X – rzutową. Wtedy z Theorem 3.2 oraz Theorem 3.4 wynika, że mamy $A(Y) \cong \mathcal{O}(Y) \cong \mathcal{O}(X) \cong k$ (jako k-algebry). Stąd: $k[x_1, \ldots, x_n]/I(Y) \cong k$ jest dziedziną całkowitości, więc $I(Y)$ jest ideałem maksymalnym. Ale ze „słabego” Nullstellensatz wiemy, że każdy ideał maksymalny w $k[x_1, \ldots, x_n]$ (dla $k = \overline{k}$) jest postaci $(x - a_1, \ldots, x - a_n)$ dla pewnego $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Stąd: $Y = Z(I(Y)) = Z((x - a_1, \ldots, x - a_n)) = \{P\}$.

1.3.2 (a) jeżeli $\phi(t) = \phi(u)$, czyli $(t^2, t^3) = (u^2, u^3)$ to albo $t = u = 0$, albo $t, u \neq 0$– wtedy $t = t^3/t^2 = u^3/u^2 = u$. Ponadto ϕ jest "na" – mamy $\phi(0) = (0, 0)$, zaś jeżeli $y^2 = x^3$ dla $x, y \neq 0$, to przyjmując $t = y/x$ mamy: $\phi(t) = (t^2, t^3) = (y^2/x^2, y^3/x^3) = (x^3/x^2, y^3/y^2) = (x, y)$.

Ponadto ϕ jest morfizmem (współrzędne są zadane przez wielomiany), jest więc ciągłe. Aby pokazać domkniętość, zauważmy, że z **Faktu** zbiory domknięte w $\mathbb{A}^1$ są skończone, więc obraz zbioru domkniętego przez ϕ jest skończony, a więc domknięty.

Aby pokazać, że φ nie jest izomorfizmem, skorzystamy z faktu z rozdziału $I.5$: gładkość krzywej jest niezmiennikiem izomorfizmu. Wystarczy zauważyć, że $\mathbb{A}^1$ jest gładkie, zaś $y^2 = x^3$ ma osobliwość w $(0,0)$.

(b) jeżeli $\phi(t) = \phi(u)$, to $t^p = u^p$, więc $(t-u)^p = 0$ oraz $t-u = 0$, $t = u$. Ponadto $k = \overline{k}$, więc dowolny element ma p-ty pierwiastek oraz ϕ jest surjekcją.

Ale obraz/przeciwobraz zbioru skończonego jest skończony, więc z **Faktu** ϕ jest ciągłe i domknięte, co dowodzi biciągłości.

Aby zauważyć, że nie jest to izomorfizm, wystarczy zauważyć (Proposition 3.5), że $\phi^* : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ nie jest izomorfizmem – to jest jednak oczywiste, bo $\phi^*(k[x]) = k[x^p] \subsetneq k[x]$ nie jest surjekcją.

1.3.3

(a) jeżeli $f \in \mathcal{O}_{\varphi(P),Y}$ jest funkcją regularną w otoczeniu U punktu $\varphi(P)$, to $\varphi^*_{\varphi(P),Y}(f) := f \circ \varphi$ jest regularna w punkcie P z definicji morfizmu i określona na zbiorze otwartym $\varphi^{-1}(U)$. Nie zależy ona również od wyboru „reprezentanta kiełka”. Jest to oczywiście homomorfizm.

(b) Niech $\psi = \varphi^{-1} : Y \to X$ będzie odwrotnym homeomorfizmem – chcemy sprawdzić, że jest on morfizmem. Niech $U \subset X$ będzie otwarty, zaś $f : U \to k$ będzie regularne; pokażemy, że $f \circ \psi$ jest regularne w każdym punkcie $\psi^{-1}(U)$. Niech $P \in \psi^{-1}(U)$ – wtedy z założenia $\varphi^* : \mathcal{O}_{\varphi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,X}$ jest izomorfizmem, niech $F : \mathcal{O}_{P,X} \to \mathcal{O}_{\varphi(P),Y}$ będzie izomorfizmem odwrotnym. Zauważmy, że

$$F(f)(Q) = F(f)(\varphi \circ \psi(Q)) = (\varphi^* \circ F)(f)(\psi(Q)) = f(\psi(Q))$$

więc $f \circ \psi = F(f) \in \mathcal{O}_{\varphi(P),Y}$ jest regularne w punkcie P – to kończy dowód.

(c) załóżmy, że f jest funkcją określoną na otoczeniu $U \subset Y$ punktu $\varphi(P) \in Y$ oraz $f \in \ker \varphi^*_{\varphi(P),Y}$, tzn. $\forall_{Q \in \varphi^{-1}(U)} \quad 0 = \varphi^*_{\varphi(P),Y}(f)(Q) = f(\varphi(Q))$. Stąd $\varphi(\varphi^{-1}(U)) \subset \{R \in U : f(R) = 0\}$, czyli $U \cap im\,\varphi \subset \{R \in U : f(R) = 0\}$. Ale $\overline{im\,\varphi} = Y$, więc $\overline{U \cap im\,\varphi} = U$ (domknięcie rozpatrujemy w topologii indukowanej na U; patrz lemat poniżej). Zbiór $\{R \in U : f(R) = 0\}$ jest jednak w tej topologii domknięty (jako przekrój zbioru algebraicznego z U), więc $\{R \in U : f(R) = 0\} = U$ oraz $f \equiv 0$.

> **Lemat** Niech Y będzie nierozkładalną przestrzenią topologiczną, $Z \subset Y$ – gęstym podzbiorem, zaś $U \subset Y$ – niepustym otwartym zbiorem. Wtedy $Y \cap U$ jest gęsty w U, tzn. $cl_U(Y \cap U) = U$.
> **Dowód:** mamy: $Y = cl_Y(Z) = cl_Y((Z \cap U) \cup (Z \cap U')) = cl_Y(Z \cap U) \cup cl_Y(Z \cap U')$, więc z nierozkładalności $Y = cl_Y(Z \cap U)$ lub $Y = cl_Y(Z \cap U')$. Ale $Z \cap U' \subset U'$, więc $cl_Y(Z \cap U') \subset U' \subsetneq Y$. Stąd $cl_Y(Z \cap U) = Y$, więc $cl_U(Z \cap U) = cl_Y(Y \cap U) \cap U = U$.

1.3.5 H jest hiperpowierzchnią, więc $H = Z(f)$ dla pewnego $f \in k[x_0, \ldots, x_n]_{hom}$ stopnia d (zadanie 2.8). Niech $\rho_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ będzie *d-tuple embedding* (gdzie $N = \binom{n}{d} - 1$) – wtedy z zadania 2.12: $\rho_d(Z(f)) = Z(\theta^{-1}((f)))$. Ale $f = \theta(g)$ dla pewnego wielomianu $g \in k[y_0, \ldots, y_N]$ stopnia 1, więc $\rho_d(Z(f)) = Z((g) + \ker\theta) = Z(g) \cap im\,\rho_d$ oraz $\rho_d(\mathbb{P}^n \backslash Z(f)) = im\,\rho_d \backslash \rho_d(Z(f)) = im\,\rho_d \backslash Z(g)$. Ale $\mathbb{P}^N \backslash Z(g)$ jest izomorficzne z $\mathbb{A}^N$ (zawsze możemy zamienić zmienne liniowo tak, by $g = y_1$) – stąd (i z zadania 3.4)

$$\mathbb{P}^n \backslash H \cong im\,\rho_d \backslash \rho_d(Z(f)) = im\,\rho_d \cap \left(\mathbb{P}^N \backslash Z(g)\right)$$

jest rozmaitością afiniczną (afiniczną częścią rozmaitości rzutowej $im\,\rho_d$).

1.3.6 **Krok I:** $\mathcal{O}(X) = k[x,y]$ (*„algebraiczny lemat Hartshoga”*).

Dowolna funkcja regularna na X jest funkcją wymierną na $\mathbb{A}^1$, więc należy do $k(x,y)$. Niech $f(x,y)/g(x,y) \in \mathcal{O}(X)$. Bez straty ogólności, możemy założyć, że $NWD(f,g) = 1$ ($k[x,y]$ ma jednoznaczność rozkładu). Z regularności, dla każdego $P \neq (0,0)$ istnieją wielomiany F, G takie, że $f/g = F/G$ oraz $G(P) \neq 0$ – ze względnej pierwszości mamy jednak $f|F$, $g|G$, więc $g(P) \neq 0$.
Stąd $Z(g) \subset \{(0,0)\}$. Ale, jeżeli g byłby niestały, to $\dim Z(g) = 1$, sprzeczność! Stąd $g(x,y) = c$ jest stały oraz $f/g \in k[x,y]$, czyli $\mathcal{O}(X) \subset k[x,y]$. Druga inkluzja jest jasna.

Krok II: z twierdzenia I.3.5, jeżeli X byłoby afiniczne, to ponieważ $A(X) = k[x, y] = A(\mathbb{A}^2)$, to byłoby $X \cong \mathbb{A}^2$. Załóżmy nie wprost, że $F : X \to \mathbb{A}^2$, $G : \mathbb{A}^2 \to X$ są izomorfizmami. Wtedy $F(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y)]$ dla pewnych $f_i \in \mathcal{O}(X) = k[x, y]$, więc F można przedłużyć do odwzorowania $\widetilde{F} : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$. Morfizmy $G \circ \widetilde{F} : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ oraz $id_{\mathbb{A}^2}$ są równe na zbiorze gęstym X, więc są równe, co jest niemożliwe – wtedy $G(\widetilde{F}(0, 0)) = (0, 0)$, przecząc temu, że $(0, 0) \notin G(\mathbb{A}^2)$. To kończy dowód.

1.3.7

(a) niech C_1, C_2 będą krzywymi w $\mathbb{P}^2$ – wtedy z zadania 2.8: $C_i = Z(f_i)$ dla pewnych wielomianów $f_i \in k[x, y, z]_{hom}$. Ale $\sqrt{(f_0) + (f_1)} \neq S_+$ – istotnie, w przeciwnym przypadku (f_0, f_1) byłby S_+–radykałowym ideałem o dwóch generatorach, więc $ht(S_+) \leqslant 2$. Ale $0 \subsetneq (x) \subsetneq (x, y) \subsetneq (x, y, z) = S_+$, więc $ht(S_+) \geqslant 3$. Stąd (bo $Z(I) = \varnothing$ wtw. gdy $\sqrt{I} = S_+$): $Z(f_0) \cap Z(f_1) = Z((f_0) + (f_1)) \neq \varnothing$.

(b) załóżmy nie wprost, że $Y \subset \mathbb{P}^n \backslash H$ – wtedy z zadania 3.5 $\mathbb{P}^n \backslash H$ jest rozmaitością afiniczną, więc Y (jako podrozmaitość rozmaitości afinicznej oraz $\mathbb{P}^n$) jest afiniczna oraz rzutowa. Z zadania 3.1 (e) oznacza to, że Y jest jednopunktowa – sprzeczność z $\dim Y \geqslant 1$ kończy dowód.

1.3.8 Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^n \backslash (H_i \cap H_j))$ – wtedy $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^n \backslash H_i) \cong S(\mathbb{P}^n)_{(x_i)}$, więc na zbiorze $\mathbb{P}^n \backslash H_i$: $f = \frac{g_i}{x_i^{n_i}}$ dla pewnego $g_i \in k[x_0, \ldots, x_n]_{n_i}$. Analogicznie na zbiorze $\mathbb{P}^n \backslash H_j$: $f = \frac{g_j}{x_j^{n_j}}$ dla pewnego $g_j \in k[x_0, \ldots, x_n]_{n_j}$. Oznacza to, że $x_j^{n_j} \cdot g_i = x_i^{n_i} \cdot g_i$. Wtedy z jednoznaczności rozkładu na wielomiany nierozkładalne w $k[x_0, \ldots, x_n]$: $x_i^{n_i} | x_j^{n_j} \cdot g_i$, więc $x_i^{n_i} | g_i$, więc (ponieważ $\deg g_i = n_i$) $g_i = c \cdot x_i^{n_i}$ dla pewnej stałej $c \in k$ oraz $f = c \in k$.

1.3.9 Mamy: $\rho_2(S : T) = [S^2 : ST : T^2] : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$. Niech $V = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : xz = y^2\}$. Rozważmy funkcję $\Psi : V \to \mathbb{P}^1$:

$$\Psi(x : y : z) = \begin{cases} (x : y), & \text{dla } x \neq 0 \text{ lub } y \neq 0 \\ (y : z), & \text{dla } y \neq 0 \text{ lub } z \neq 0 \end{cases}$$

– wtedy $\rho_2 \circ \Psi = id$ oraz $\Psi \circ \rho_2 = id$, więc $\rho_2(\mathbb{P}^1) = V$.
Z drugiej strony $S(\mathbb{P}^1) = k[S, T]$, zaś $S(V) = k[x, y, z]/(xz - y^2) = k[\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}]$ – pierwszy pierścień posiada własność jednoznaczności rozkładu, zaś drugi nie, ponieważ rozkłady $\overline{y}^2 = \overline{y} \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot \overline{z}$ są różnymi rozkładami na elementy nierozkładalne.

1.3.10 Niech $U' \subset Y'$ będzie dowolnym zbiorem otwartym, $V' := \varphi^{-1}(U) \cap X' \subset X'$ oraz $P \in V'$, zaś $f : X' \to Y'$ – dowolną funkcją regularną. Pokażemy, że $f \circ \varphi|_{V'}$ jest regularne w P. Bez straty ogólności: $f = \frac{F}{G}$ dla pewnych wielomianów F, G (G nie zeruje się na V) – wtedy f jest dobrze określone i regularne na zbiorze otwartym $V := D_Y(G) := \{R \in Y : G(R) \neq 0\}$, więc (jako że $\varphi : X \to Y$ jest morfizmem) $f \circ \varphi : X \to Y$ jest regularne oraz $f \circ \varphi : X' \to Y'$ również.

1.3.11 Bez straty ogólności załóżmy, że X jest rozmaitością afiniczną (jeżeli X jest quasi-rzutowy/afiniczny, to możemy go domknąć, a następnie zastąpić przez dowolną część aficzniczną X', do której należy punkt P – podrozmaitości w X' będą odpowiadały podrozmaitościom w X przez wzięcie domknięcia).
Wtedy $\mathcal{O}_P \cong A(X)_{\mathfrak{m}_P} = (k[x_1, \ldots, x_n]/I(X))_{\mathfrak{m}_P}$, więc ideały pierwsze w $\mathcal{O}_P$ odpowiadają bijektywnie ideałom pierwszym $\mathfrak{p}$ spełniającym: $I(X) \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_P$. Te zaś ideały będą odpowiadały bijektywnie rozmaitościom $V(\mathfrak{p})$, spełniającym: $\{P\} = V(\mathfrak{m}_P) \subset V(\mathfrak{p}) \subset V(I(X)) = X$, co dowodzi tezy.

1.3.12 Bez straty ogolności możemy najpierw założyć, że X jest rozmaitością afiniczną lub rzutową (jeżeli jest quasiafiniczna/quasirzutowa to $\overline{X}$ spełnia z zadania 2.7: $\dim X = \dim \overline{X}$; ponadto $\mathcal{O}_P$ nie zmieni się – są to funkcje zdefiniowane w otoczeniu P). Następnie możemy zastąpić X przez jego dowolny niepusty afiniczny kawałek (dowód zadania 2.6 pokazuje, że nie zmienia to wymiaru).
Jeżeli zaś X jest rozmaitością afiniczną, to z Twierdzenia 3.2: $\mathcal{O}_P = A(X)_{\mathfrak{m}_P}$. Ale k jest uniwersalnie łańcuchowym pierścieniem (wykład z Algebry Przemiennej), więc $\dim A(X)_{\mathfrak{m}_P} = \dim A(X)$, co dowodzi równości

$$\dim \mathcal{O}_P = \dim A(X)_{\mathfrak{m}_P} = \dim A(X) = \dim X$$

1.3.13 Niech

$$\mathfrak{m}_{Y,X} := \{\langle f, U \rangle \in \mathcal{O}_{Y,X} : \quad \forall_{P \in Y \cap U} \qquad f(P) = 0\}$$

Zauważmy, że dowolna funkcja z $\mathcal{O}_{Y,X}$ może być rozpatrywana jako funkcja wymierna na Y – to daje epimorfizm $\mathcal{O}_{Y,X} \to K(Y)$, którego jądrem jest (z definicji) $\mathfrak{m}_{Y,X}$, co daje: $\mathcal{O}_{Y,X}/\mathfrak{m}_{Y,X} \cong K(Y)$. W szczególności ideał $\mathfrak{m}_{Y,X}$ jest maksymalny.

Wykażemy, że $\mathcal{O}_{Y,X} \backslash \mathfrak{m}_{Y,X} \subset \mathcal{O}^*_{Y,X}$, co dowiedzie lokalności $\mathcal{O}_{Y,X}$. Istotnie, niech $\langle f, U \rangle \in \mathcal{O}_{Y,X} \backslash \mathfrak{m}_{Y,X}$ oraz $W = D(f)$. Wtedy $\langle 1/f, W \rangle$ jest elementem odwrotnym do $\langle f, W \rangle$.

Bez straty ogólności możemy znów założyć, że X, Y są rozmaitościami afinicznymi – krótkie uzasadnienie:

niech X, Y będą rozmaitościami rzutowymi oraz niech X', Y' będą częściami afinicznymi, spełniającymi $X', Y' \neq \varnothing$. Wtedy mamy izomorfizm $\mathcal{O}_{X,Y} \cong \mathcal{O}_{X',Y'}$ – zadany jest on przez obcięcie: $\mathcal{O}_{X,Y} \to \mathcal{O}_{X',Y'}$, $\langle f, U \rangle \to \langle f|_{U \cap Y'}, U \cap Y' \rangle$. Oznaczmy przez cl_X domknięcie w przestrzeni X. Obcięcie jest:

- iniekcją – jeżeli $f|_{U \cap Y'} = 0$, to z równości $cl_Y(Y') = Y$ mamy: $cl_U(Y' \cap U) = U$ oraz $f \equiv 0$ na U.
- surjekcją – jeżeli $\langle f, U \rangle \in \mathcal{O}_{Y',X'}$, to U jest również otwarty w Y, więc $\langle f, U \rangle \in \mathcal{O}_{Y,X}$.

Ponadto (zad. 1.2.7b) mamy: $\dim X = \dim X'$ oraz $\dim Y = \dim Y'$.

Dla rozmaitości afinicznych mamy jednak: $\mathcal{O}_{Y,X} \cong A(X)_{I(Y)}$. Istotnie, jeżeli funkcja wymierna $f/g \in K(X) \cong A(X)$ należy do $\mathcal{O}_{Y,X}$, to istnieje punkt $P \in Y$ spełniający $g(P) \neq 0$, więc $g \notin I(Y)$. Na odwrót, dowolny element $A(X)_{I(Y)}$ poprawnie określa element $\mathcal{O}_{Y,X}$.

Ideały pierwsze w $A(X)_{I(Y)}$ odpowiadają jednak ideałom pierwszym $\mathfrak{p} \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ spełniającym $I(X) \subset \mathfrak{p} \subset I(Y)$. Z własności „uniwersalnej łańcuchowości” ciała k (Wykład z Algebry Przemiennej) oraz Tw. 1.8A (b):

$$\dim \mathcal{O}_{Y,X} = \dim A(X)_{I(Y)} = \mathit{height}(I(Y)) - \mathit{height}(I(Y)) =$$

$$= \dim \Big(k[x_1, \ldots, x_n]/I(X) \Big) - \dim \Big(k[x_1, \ldots, x_n]/I(Y) \Big) = \dim X - \dim Y$$

1.3.14

(a) niech $P = [1 : p_1 : \ldots : p_{n+1}]$ oraz $Q = [q_0 : \ldots : q_{n+1}]$ – wtedy prosta przez punkty P i Q to zbiór

$$\{aP + bQ : a, b \in k, \quad (a, b) \neq 0\} = \{cP + Q : c \in k\} \cup \{P\} = \{[c + q_0 : cp_1 + q_1 : \ldots : cp_{n+1} + q_{n+1}] : c \in k\}$$

oraz jej przekrój z $\mathbb{P}^n = \{[0 : s_1 : \ldots : s_{n+1}]\}$ to punkt $-q_0 P + Q = [0 : -q_0 p_1 + q_1 : \ldots : -q_0 p_{n+1} + q_{n+1}]$. Stąd:

$$\varphi(Q) = [0 : -q_0 p_1 + q_1 : \ldots : -q_0 p_{n+1} + q_{n+1}]$$

Wystarczy więc zauważyć, że φ jest dane przez wielomiany jednorodne bez wspólnego zera różnego od P (wtedy na każdym kawałku afinicznym $\mathbb{P}^n$ możemy skorzystać z kryterium z zadania 3.6, aby dowieść, że ϕ jest morfizmem) – istotnie, jeżeli $\forall_i \quad -q_0 p_i = q_i$ to $q_0 \neq 0$ (w przeciwnym wypadku $\forall_i q_i = 0$) oraz $Q = [q_0 : \ldots : q_{n+1}] = [q_0 : q_0 p_1 : \ldots : q_0 p_{n+1}] = [1 : p_1 : \ldots : p_{n+1}] = P$.

(b) z zadań 1.2.9 oraz 1.2.12 (po przenumerowaniu zmiennych): $Y = Z(yz - xw, y^2 - xz, z^2 - yw)$. Zauważmy, że $\phi([x : y : z : w]) = [x : y : 0 : w]$. Wykażemy, że $Q = [x : y : 0 : w] \in \phi(Y)$ wtw. gdy $y^3 = wx^2$, tzn. że $\varphi(Y) = Z(y^3 - wx^2)$.

- jeżeli $x, y \neq 0$ to $Q \in Y$ wtw. gdy istnieje z spełniające $0 = yz - xw = y^2 - xz = z^2 - yw$. Po wyznaczeniu z z pierwszego i drugiego równania: $z = y^2/x = xw/y$, więc $y^3 = x^2 w$. Na odwrót, jeżeli $y^3 = x^2 w$ to z dane przez $z = y^2/x = xw/y$ spełnia też trzecie równanie: $z^2 = y^2/x \cdot xw/y = yw$.
- jeżeli $x = 0$, to $Q \in Y$ wtw. gdy istnieje z spełniające $0 = yz = y^2 = z^2 - yw$, wtw. gdy $0 = y = z$ wtw. gdy $Q = [0 : 0 : 0 : 1]$. Jest to jednak jedyny punkt na $C : y^3 = x^2 w$ ($C \subset \mathbb{P}^2$) spełniający $x = 0$.
- jeżeli $y = 0$, to $Q \in Y$ wtw. gdy istnieje z spełniające $0 = -xw = -xz = z^2$, wtw. gdy $0 = z$ oraz $xw = 0$, wtw. gdy $Q = [0 : 0 : 0 : 1]$ lub $Q = [1 : 0 : 0 : 0]$. Są to jednak jedyne dwa punkty na $C : y^3 = x^2 w$ spełniające $y = 0$.

1.3.17

W zadaniu będziemy kilkakrotnie korzystali z podpunktu (d):

(d) Z Atiyaha–MacDonalda (Stwierdzenie 5.13):

$A(Y)$ jest całkowicie domknięty wtw. gdy dla każdego ideału maksymalnego $\mathfrak{m}$ pierścień $A(Y)_\mathfrak{m}$ jest całkowicie domknięty. Mamy jednak: $A(Y)_\mathfrak{m} = \mathcal{O}_P$, gdzie P –punkt odpowiadający ideałowi maksymalnemu $\mathfrak{m}$. To dowodzi tezy.

(a) Dowolna stożkowa w $\mathbb{P}^2$ jest postaci $Y : x^2 = yz$. Wystarczy więc pokazać, że jej części afiniczne: $Y_1 : x^2 = y$ oraz $Y_2 : 1 = yz$ są normalne. Ale pierścienie:

$$A(Y_1) = k[x, y]/(x^2 - y) \cong k[x]$$

$$A(Y_2) = k[y, z]/(yz - 1) \cong k[y, 1/y] \cong k[y]_y$$

są całkowicie domknięte – pierwszy jest dziedziną ideałów głównych, zaś drugi jest całkowicie domknięty jako lokalizacja $k[y]$ na elemencie y (Stwierdzenie 5.12 z Atiyah–MacDonalda).

(b) **Powierzchnia $Q_1 : xy = zw$:**

Analogicznie wystarczy sprawdzić, że pierścienie współrzędnych części afinicznych są całkowicie domknięte. Niech $Q' : xy = z$, $Q' \subset \mathbb{P}^2$ – wtedy:

$$A(Q') = k[x, y, z]/(xy - z) \cong k[x, y]$$

(izomorfizm dany jest przez $f(x, y, z) \mapsto f(x, y, xy)$). Ale $k[x, y]$ jest całkowicie domknięte jako dziedzina z jednoznacznością rozkładu.

Powierzchnia $Q_2 : xy = z^2$:

Rozważmy afiniczne części:

- $Q' = Q \cap \{(x : y : z : w) : z \neq 0\}$ o równaniu $Q' : xy = 1$,
- $Q'' = Q \cap \{(x : y : z : w) : y \neq 0\}$ o równaniu $Q'' : x = z^2$,
- $Q''' = Q \cap \{(x : y : z : w) : z \neq 0\}$ o równaniu $Q''' : y = z^2$.

– wtedy $Q = Q' \cup Q'' \cup Q''' \cup \{(0 : 0 : 0 : 1)\}$. Rozmaitości afiniczne Q', Q'', Q''' są normalne:

- $A(Q') = k[x, y, w]/(xy - 1) \cong k[x, w]_x$ jest całkowicie domknięte jako lokalizacja całkowicie domkniętego pierścienia,
- $A(Q'') = k[x, z, w]/(x - z^2) \cong k[z, w]$ jest całkowicie domknięte jako pierścień z jednoznacznością rozkładu; analogicznie dla $A(Q''')$.

Aby pokazać, że punkt $P = (0 : 0 : 0 : 1)$ jest normalny, zauważmy, że:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_P &= \left(\frac{k[x, y, z]}{(xy - z^2)}\right)_{\mathfrak{m}_P} = \left(\frac{k[x, y, z]}{(xy - z^2)}\right)_{(x,y,z)} = \\ &= \frac{k[x, y, z]_{(x,y,z)}}{(xy - z^2)} = \frac{k[x, y, z]_{(x,y,z)}}{(y - z^2/x)} \cong k[x, z]_{(x,z)}\end{aligned}$$

– ostatni izomorfizm indukowany jest przez

$$\phi : k[x, y, z]_{(x,y,z)} \to k[x, z]_{(x,z)}, \qquad \phi(f(x, y, z)) = f(x, z^2/x, z)$$

Istotnie – ϕ jest "na" ($\phi(f(x, z)) = f(x, z)$) oraz $\ker \phi = (xy - z^2)$, ponieważ jeżeli $f(x, y, z) = g(x, y, z)/(xyz)^n \in \ker \phi$ (gdzie $g \in k[x, y, z]$), to $f(x, z^2/x, z) \equiv 0$, więc $g(x, z^2/x, z) \equiv 0$, więc (traktując g jako element $k[x, z]_{(x,z)}[y]$) $y - \frac{z^2}{x}$ dzieli $g(x, z^2/x, z)$ w $k[x, z]_{(x,z)}[y]$, więc $g \in (xy - z^2)$, co daje $f \in (xy - z^2)$.

Pierścień $k[x, z]_{(x,z)}$ jest zaś całkowicie domknięty, jako lokalizacja całkowicie domkniętego.

(c) Pierścień $R = k[x,y]/(y^2 - x^3) = k[\overline{x}, \overline{y}]$ nie jest całkowicie domknięty, ponieważ $\overline{y}/\overline{x} \in Frac(R)$ jest pierwiastkiem $P(T) = T^2 - \overline{x} \in R[x]$ (bo $\overline{y}^2/\overline{x}^2 = \overline{x}^3/\overline{x}^2 = \overline{x}$), ale nie należy do R. Istotnie, gdyby $\overline{y}/\overline{x} = P(\overline{x}, \overline{y}) \in R$, to $y - x \cdot P(x,y) \in (y^2 - x^3)$, tzn. $y - x \cdot P(x,y) = (y^2 - x^3) \cdot R(x,y)$ dla pewnego $R \in k[x,y]$. Ale w wyrażeniu $(y^2 - x^3) \cdot R(x,y)$ nie może występować y (pojawiają się tam tylko jednomiany stopnia $\geqslant 1$) – to dowodzi, że $\overline{y}/\overline{x} \notin R$.

(e) Będziemy korzystali z tego, że kategorie rozmaitości afinicznych oraz skończonych k-algebr będących dziedzinami całkowitości są rownoważne.

Niech B będzie domknięciem całkowitym $A(X)$ w $K(X)$ – wtedy B jest skończoną k-algebrą (z Twierdzenia 3.9A), dziedziną całkowitości oraz jest całkowicie domknięta. Spełnia więc: $B = A(\widetilde{Y})$, gdzie $\widetilde{Y}$ jest pewną rozmaitością normalną. Ponadto inkluzja $A(Y) \hookrightarrow A(\widetilde{Y})$ odpowiada odwzorowaniu $\pi : \widetilde{Y} \to Y$.

Niech $\varphi : Z \to Y$ będzie dominującym morfizmem z rozmaitości normalnej Z. Wtedy $\varphi^* : A(Y) \to A(Z)$ jest monomorfizmem:

- jeżeli
$$\forall_P \qquad 0 = \varphi^*(g)(P) = g(f(P))$$
to $f(Z) \subset g^{-1}(0)$, więc $Y = \overline{f(Z)} \subset g^{-1}(0)$ oraz z twierdzenia Hilberta o zerach: $g = 0$ w $A(Y)$

tak więc przedłuża się do odwzorowania między ciałami ułamków: $\varphi^* : K(Y) \to K(Z)$. Oczywiście φ^* jest izomorfizmem na swój obraz, więc $\varphi^*(A(\widetilde{Y}))$ jest domknięciem całkowitym $\varphi^*(A(Y))$ w $\varphi^*(K(Y))$. Ale pierścień $A(Z)$ (zawierający $\varphi^*(A(Y))$) jest z założenia całkowicie domknięty, więc $\varphi^*(A(\widetilde{Y})) \subset A(Z)$. Niech $\theta : Z \to \widetilde{Y}$ będzie odwzorowaniem odpowiadającym złożeniu $A(\widetilde{Y}) \xrightarrow{\simeq} \varphi^*(A(\widetilde{Y})) \hookrightarrow A(Z)$. Zauważmy, że $\varphi^* : A(Y) \to A(Z)$ odpowiada złożeniu $A(Y) \overset{\pi^*}{\hookrightarrow} A(\widetilde{Y})$ oraz $A(\widetilde{Y}) \overset{\theta^*}{\hookrightarrow} A(Z)$, więc $\varphi = \pi \circ \theta$.

1.3.18

(a) Niech Y_i będzie i-tą częścią afiniczną Y – wtedy $A(Y_i) = S(Y)_{(x_i)}$ (nawias oznacza, że rozpatrujemy tylko elementy gradacji 0). Ale $S(Y)$ jest całkowicie domknięty, więc lokalizacja $S(Y)_{x_i}$ również (lokalizacja całkowicie domkniętego pierścienia jest całkowicie domknięta – Stwierdzenie 5.12/Atiyah-Macdonald). Wystarczy więc pokazać:

Lemat Jeżeli $R = \bigoplus_i R_i$ jest całkowicie domkniętym pierścieniem z gradacją, to R_0 jest również całkowicie domknięte.

Dowód: jeżeli $r \in Frac(R_0)$ jest całkowite nad R_0:
$$r^n + \sum_i a_i r^i = 0, \qquad \text{(gdzie } a_i \in R_0 \text{)} \qquad (*)$$
to jest też całkowite nad R, więc $r \in R$. Niech $r = r_0 + \ldots + r_d$ (gdzie $r_d \neq 0$) będzie rozkładem na części jednorodne i załóżmy nie wprost, że $d \geqslant 1$. Wtedy porównując części stopnia nd w równaniu $(*)$ dostajemy $r_d = 0$ – sprzeczność oznacza, że $r \in R_0$. $\square$

(b) normalność wynika z podpunktu (c).

Niech $S(Y) = k[x,y,z,w]/I(Y) = k[\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w}]$. Zauważmy, że $I(Y) = \{f \in k[x,y,z,w] : f(t^4, t^3u, tu^3, u^4) \equiv 0\}$ oraz że $(xw - yz, z^3 - yw^2, y^3 - x^2z) \subset I(Y)$. Element $\frac{\overline{xz}}{\overline{y}} \in Frac(S(Y))$ jest całkowity nad $S(Y)$, bo spełnia równanie $T^2 - \overline{yz} = 0$ – mamy bowiem:
$$\left(\frac{\overline{xz}}{\overline{y}}\right)^2 = \frac{(\overline{x}^2\overline{z}) \cdot \overline{z}}{\overline{y}^2} = \frac{\overline{y}^3 \cdot \overline{z}}{\overline{y}^2} = \overline{yz}$$
Element ten nie należy jednak do $S(Y)$ – gdyby $\frac{\overline{xz}}{\overline{y}} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w})$ dla $f \in k[x,y,z,w]$ to $xz - y \cdot f(x,y,z,w) \in I(Y)$ oraz rozpatrując części jednorodne stopnia 2 (zauważmy, że $I(Y)$ jest jednorodny) możemy założyć bez straty ogólności, że $f(x,y,z,w) = ax + by + cz + dw$ jest stopnia 1. Wtedy jednak:
$$0 \equiv t^4 \cdot tu^3 - t^3 \cdot u \cdot f(t^4, t^3u, tu^3, u^4) = t^5 \cdot u^3 - t^3 \cdot u \cdot (at^4 + bt^3u + ctu^3 + du^4)$$
co jest niemożliwe, bo wszystkie jednomiany powyżej są różne.

(c) izomorfizmy $Y \cong \mathbb{P}^1$ dane są jako:

$$\mathbb{P}^1 \ni \qquad (t,s) \mapsto (t^4, t^3u, tu^3, u^4) \qquad \in Y$$

$$Y \ni \qquad (X,Y,Z,W) \mapsto \begin{cases} (Z,W), & \text{dla } W \neq 0 \\ (X,Y), & \text{dla } X \neq 0 \end{cases} \qquad \in \mathbb{P}^1$$

– są one zadane przez wielomiany bez wspólnych zer należących do dziedziny, a ponadto składają się do identyczności.

Pierścień $S(\mathbb{P}^1) = k[x,y]$ jest oczywiście całkowicie domknięty, jako dziedzina z jednoznacznością rozkładu.

1.3.19

(a) niech ψ będzie izomorfizmem odwrotnym – wtedy $\phi \circ \psi = id$, więc (z własności macierzy Jakobiego) $[D\phi] \cdot [D\psi] = I$, więc $\det[D\phi] \cdot \det[D\psi] = 1$ w $k[x_1, \dots, x_n]$. Iloczyn wielomianów może być jednak stałą wtw. gdy są one wielomianami stałymi.

1.3.20

(a) Bez straty ogólności możemy założyć, że Y jest rozmaitością quasiafiniczną. Skorzystamy z następującej charakteryzacji pierścieni całkowicie domkniętych *(znalezionej na Wikipedii)*:

Fakt Niech R – noetherowska dziedzina całkowitości. Wtedy R jest całkowicie domknięty (CD) wtw. gdy spełnia następujące warunki:

(A) $\forall_{ht(\mathfrak{p})=1} \quad R_{\mathfrak{p}}$ jest pierścieniem dyskretnej waluacji,

(B) $\bigcap_{ht(\mathfrak{p})=1} R_{\mathfrak{p}} = R$.

Dowód:

- $(CD \Rightarrow A)$: R jest całkowicie domknięty $\Rightarrow$ (Stwierdzenie 5.13/Atiyah-Macdonald) $\forall_{ht(\mathfrak{p})=1} \quad R_{\mathfrak{p}}$ jest całkowicie domknięty $\Rightarrow$ $R_{\mathfrak{p}}$ jest całkowicie domknięty, wymiaru $ht\mathfrak{p} = 1$ oraz noetherowski $\Rightarrow$ $R_{\mathfrak{p}}$ jest lokalnym pierścieniem Dedekinda $\Rightarrow$ $R_{\mathfrak{p}}$ jest DVR.
- $(CD \Rightarrow B)$: Hartshorne, Proposition II.6.3 A, str. 132.
- $(A + B \Rightarrow CD)$: niech $x^n + \sum a_i x^i = 0$, $a_i \in R$, $x \in Frac(R)$. Ustalmy $\mathfrak{p}$ spełniające $ht(\mathfrak{p}) = 1$ i niech $v_{\mathfrak{p}}$ będzie dyskretną waluacją związaną z $\mathfrak{p}$. Załóżmy nie wprost, że $v_{\mathfrak{p}}(x) < 0$ – wtedy

$$n \cdot v_{\mathfrak{p}}(x) = v_{\mathfrak{p}}(x^n) = v_{\mathfrak{p}}(-\sum a_i x^i) \geqslant \min_i \{v_{\mathfrak{p}}(a_i x^i)\} = \min_i \{v_{\mathfrak{p}}(a_i) + i v_{\mathfrak{p}}(x)\} \geqslant$$

$$\geqslant \min_i \{0 + i v_{\mathfrak{p}}(x)\} \geqslant (n-1) v_{\mathfrak{p}}(x) \qquad n \cdot v_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant (n-1) v_{\mathfrak{p}}(x)$$

czyli $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant 0$ - sprzeczność. Stąd $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant 0$, więc $x \in R_{\mathfrak{p}}$ oraz $x \in \bigcap_{ht(\mathfrak{p})=1} R_{\mathfrak{p}} = R$.

Niech $f \in \mathcal{O}(Y \backslash \{P\})$, zaś $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ będą wszystkimi ideałami pierwszymi wysokości 1 w $\mathcal{O}_P$. Ustalmy i oraz niech $W := V(\mathfrak{p}_i)$. Wtedy (zadanie 3.13) $\mathcal{O}_{W,Y} = (\mathcal{O}_P)_{\mathfrak{p}_i}$, więc z całkowitej domkniętości $\mathcal{O}_P$ oraz z $(CD) \Rightarrow (A)$ pierścień $\mathcal{O}_{W,Y}$ jest DVR; niech v będzie związaną z nim waluacją oraz niech $\mathfrak{m}_{W,Y} = h\mathcal{O}_{W,Y}$. Widzimy też, że $1 = \dim \mathcal{O}_{W,Y} = \dim Y - \dim W \geqslant 2 - \dim W$, tzn. $\dim W \geqslant 1$.

Załóżmy nie wprost, że $v(f) = -n < 0$. Wtedy $f = \frac{g}{h^n}$ dla pewnego $g \in \mathcal{O}^*_{W,Y}$. Oznacza to, że g nie zeruje się na pewnym podzbiorze otwartym $U \subset W$. Ale $\dim U = \dim W \geqslant 1$, więc możemy wybrać $R \in U \backslash \{P\}$ – wtedy $g(W) \neq 0$. Wtedy jednak $f(R) = \frac{g(R)}{h^n(R)}$ jest nieokreślone, co daje sprzeczność z regularnością f na $Y \backslash \{P\}$!

Stąd $f \in \mathcal{O}_{W,Y} = (\mathcal{O}_P)_{\mathfrak{p}_i}$ oraz (z warunku $(CD \Rightarrow B)$) $f \in \bigcap_i (\mathcal{O}_P)_{\mathfrak{p}_i} = \mathcal{O}_P$, co kończy dowód.

(b) rozważmy dowolną krzywą eliptyczną $E : y^2 z = x^3 + Axz^2 + Bz^3$. Wtedy, jeżeli $[x : y : z] \in E$ oraz $z = 0$, to $x = 0$ oraz $[x : y : z] = [0 : 1 : 0]$. Funkcja $\frac{y}{z}$ jest więc regularna poza punktem $[0 : 1 : 0]$ – w nim nie może być określona (bo w mianowniku jest zero, zaś w liczniku nie).

1.3.21

(a) odwzorowanie μ jest oczywiście regularne (jest wielomianem) i spełnia aksjomaty grupy (pochodzi od działania grupowego na k). Odwzorowanie „elementu odwrotnego” jest dane jako: $a \mapsto -a$ i również jest regularne.

(b) odwzorowanie μ jest oczywiście regularne (jest wielomianem) i spełnia aksjomaty grupy (pochodzi od działania grupowego na k^*). Odwzorowanie „elementu odwrotnego” jest dane jako: $a \mapsto 1/a$ i również jest regularne.

(c) działanie na $Hom(X, G)$ jest zadane jako dodawanie „po współrzędnych”, tzn. jako: $(f, g) \mapsto \mu(f, g)$ – jest to morfizm (jako złożenie mofizmu $P \mapsto (f(P), g(P))$ z morfizmem μ). Działanie to spełnia aksjomaty grupy, jako że spełnia je μ.

(d) Elementy $Hom(X, G_a)$ są regularnymi funkcjami $f : X \to G_a = \mathbb{A}^1$ wraz z dodawaniem „po współrzędnych”, więc z definicji $Hom(X, G_a) \cong \mathcal{O}(X)$.

(e) Elementy $Hom(X, G_m)$ są regularnymi funkcjami $f : X \to G_m = \mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$ wraz z mnożeniem „po współrzędnych”, tzn. regularnymi funkcjami $f : X \to \mathbb{A}^1$, które nie przyjmują zerowych wartości (a więc są odwracalne jako elementy $\mathcal{O}(X)$). Z definicji mamy więc $Hom(X, G_m) \cong \mathcal{O}(X)^*$.

Podrozdział 1.4

1.4.3

(a) f jest określona tam, gdzie ma niezerowy mianownik, czyli na zbiorze otwartym: $\{x_0 \neq 0\}$.

(b) teraz mamy: $f(x_0, x_1, x_2) = [\frac{x_1}{x_0}, 1] = [x_1, x_0]$. Aby funkcja była dobrze określona, przynajmniej jedna współrzędna musi być niezerowa. Stąd jest ona określona na zbiorze $\mathbb{P}^2 \backslash \{(0, 0, 1)\}$.

1.4.4

(a) w zadaniu 3.1 (b) udowodniłem, że dowolna kwadryga jest izomorficzna z $\mathbb{P}^1$, w szczególności jest biwymierna z $\mathbb{P}^1$.

(b) izomorfizmy między ciałami funkcyjnymi $k(\overline{x}, \overline{y}) = Frac(k[x, y]/(y^2 - x^3))$ oraz $k(t)$ dane są przez:

$$\begin{array}{lll} \Phi : k(\overline{x}, \overline{y}) \to k(t), & \text{indukowane przez } \widetilde{\Phi} : k[x, y] \to k(t), & \widetilde{\Phi}(P(x, y)) = P(t^2, t^3) \\ \Psi : k(t) \to k(\overline{x}, \overline{y}), & \Psi(P(t)) = P(\overline{y}/\overline{x}) & \end{array}$$

– istotnie:

- Φ jest dobrze określone, bo $\ker \widetilde{\Phi} = (y^2 - x^3)$ – istotnie, mamy: $\widetilde{\Phi}(y^2 - x^3) = t^6 - t^6 = 0$, więc $(y^2 - x^3) \subset \ker \widetilde{\Phi}$. Na odwrót, jeżeli $f(t^2, t^3) = 0$, to działając w $k[\sqrt{x}][y]$ i podstawiając $t = \pm\sqrt{x}$ mamy $f(x, \pm x\sqrt{x}) = 0$, więc $f(x, y)$ ma (jako wiemlomian zmiennej y) pierwiastki w $y = \pm x\sqrt{x}$ oraz $(y - x\sqrt{x}) \cdot (y + \pm x\sqrt{x}) = y^2 - x^3$ dzieli $f(x, y)$.
  Stąd $\widetilde{\Phi} : k[x, y]/(y^2 - x^3) \to k[t]$ jest iniekcją, więc indukuje odwzorowanie między ciałami ułamków: $\Phi : k(\overline{x}, \overline{y}) \to k(t)$.
- $\Phi \circ \Psi = id$, bo $\Phi \circ \Psi(P(t)) = \Phi(P(\overline{y}/\overline{x})) = P(t^3/t^2) = P(t)$,
- $\Psi \circ \Phi = id$, bo $\Psi \circ \Phi(P(\overline{x}, \overline{y})) = \Phi(P(t^2, t^3)) = P((\overline{y}/\overline{x})^2, (\overline{y}/\overline{x})^3) = P(\overline{x}, \overline{y})$ (równość $\overline{y}^2 = \overline{x}^3$ implikuje, że $(\overline{y}/\overline{x})^2 = \overline{x}$ oraz $(\overline{y}/\overline{x})^3 = \overline{y}^3/\overline{y}^2 = \overline{y}$),

(c) Niech

$$k(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = K(Y) = \left(\frac{k[x, y, z]}{(y^2 \cdot z - x^2 \cdot (x + z))} \right)_{((0))}$$

Rzutowanie z zadania dane jest wzorem: $\phi((x, y, z)) = (x, y)$. Zauważmy, że równanie $\overline{y}^2 \cdot \overline{z} = \overline{x}^2 \cdot (\overline{x} + \overline{z}))$ jest równoważne $\overline{z} = \frac{\overline{x}^3}{\overline{y}^2 - \overline{x}^2}$ tak więc $\phi^* : k(x, y) \to k(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, dane wzorem $\phi(P(x, y)) = P(\overline{x}, \overline{y})$ jest izomorfizmem:

- jest ono ”na”, bo $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = P(\overline{x}, \overline{y}, \frac{\overline{x}^3}{\overline{y}^2 - \overline{x}^2}) = \phi\left(P(x, y, \frac{x^3}{y^2 - x^2})\right)$,
- jest ono iniekcją, bo jeżeli $\phi(P/Q) = 0$ dla pewnych wielomianów P, Q, to $P(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, czyli $P(x, y) \in (y^2 \cdot z - x^2 \cdot (x + z))$, więc $P(x, y) \equiv 0$ (w przeciwnym razie P musiałoby mieć dodatni stopień ze względu na zmienną z).

To oznacza, że ϕ jest biwymierne.

1.4.6

(a) mamy:

$$(\phi \circ \phi)(a_0,\, a_1,\, a_2) = \phi(a_1a_2, \quad a_0a_2, \quad a_0a_1) = (a_0a_2 \cdot a_0a_1, \quad a_1a_2 \cdot a_0a_1, \quad a_1a_2 \cdot a_0a_2) =$$

$$= (a_0a_1a_2 \cdot a_0, \quad a_0a_1a_2 \cdot a_1, \quad a_0a_1a_2 \cdot a_2) = (a_0,\, a_1,\, a_2)$$

Zgodnie z treścią zadania, ϕ jest dobrze określone na zbiorze otwartym $U = \mathbb{P}^2 \backslash \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ – istotnie, jeżeli $(a_1a_2, \quad a_0a_2, \quad a_0a_1) = (0,0,0)$, to przynajmniej 2 z liczb a_0, a_1, a_2 muszą być zerowe.

(b) mamy: $\phi(U) \subset U$ oraz $\phi \circ \phi = id$, więc $\phi : U \to U$ jest izomorfizmem.

(c) funkcja $\phi = \phi^{-1}$ jest określona na zbiorze otwartym U (zdefiniowanym powyżej) i w żadnym punkcie poza nim, co łatwo wynika z jednoznaczności rozkładu w $k[a_0, a_1, a_2]$ – istotnie, gdyby dla pewnych jednorodnych $f, g \in k[a_0, a_1, a_2]$ funkcje $\frac{a_1a_2 f(a_0,a_1,a_2)}{g(a_0,a_1,a_2)}, \frac{a_0a_2 f(a_0,a_1,a_2)}{g(a_0,a_1,a_2)}, \frac{a_0a_1 f(a_0,a_1,a_2)}{g(a_0,a_1,a_2)}$ nie zerowałyby się jednocześnie w $(0,0,1)$, to musiałoby zachodzić: $a_0a_1 | g$ oraz $a_0, a_1 \nmid f$ – wtedy jednak funkcje te nie byłyby dobrze określone w $(0,0,1)$ (zero w mianowniku).

1.4.7 Konstrukcja przebiega podobnie jak w Theorem 4.4. Bez straty ogólności możemy założyć, że X, Y są quasiafiniczne. Niech $\phi : \mathcal{O}_{P,X} \to \mathcal{O}_{Q,Y}$ oraz $\theta : \mathcal{O}_{Q,Y} \to \mathcal{O}_{P,X}$ będą izomorfizmami k-algebr, zaś $x_1, \ldots, x_n$ oraz $y_1, \ldots, y_m$ generatorami algebr odpowiednio $A(X)$ oraz $A(Y)$. Wtedy $\phi(x_1), \ldots$ są funkcjami regularnymi w pewnym otoczeniu $U_{Q,Y}$ punktu Q oraz analogicznie dla $\theta(x_1), \ldots$, które są określone w otoczeniu $U_{P,X}$. Niech:

$$\Phi : U_{Q,Y} \to \mathbb{A}^n, \qquad \Phi(R) = (\phi(x_1)(R), \ldots, \phi(x_n)(R))$$

$$\Theta : U_{P,X} \to \mathbb{A}^m, \qquad \Theta(S) = (\theta(y_1)(S), \ldots, \theta(y_m)(S))$$

Wtedy:

- $im\, \Phi \subset X$, bo jeżeli $f \in I(X)$, to

$$f(\Phi(R)) = f(\phi(x_1)(R), \ldots, \phi(x_n)(R)) = \phi(f(x_1, \ldots, x_n))(R) = 0$$

  (skorzystałem z tego, że ϕ jest homomorfizmem k-algebr, więc $P(\phi(y_1), \ldots) = \phi(P(y_1, \ldots))$ oraz z tego, że $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest trywialne w $\mathcal{O}_{P,X}$).
- $\Phi \circ \Theta = id$, bo

$$\Phi \circ \Theta = \Phi(\theta(y_1), \ldots, \theta(y_m)) = \Big(\phi(x_i)\Big(\theta(y_1), \ldots, \theta(y_m)\Big)\Big)_i = \Big((\theta \circ \phi)(x_i)\Big(y_1, \ldots, y_m\Big)\Big)_i = (x_1, \ldots, x_n)$$

  (skorzystałem z tego, że θ jest homomorfizmem k-algebr, więc $P(\theta(y_1), \ldots) = \theta(P(y_1, \ldots))$ oraz z tego, że $\theta \circ \phi = id$)
- $\Phi(P) = Q$, bo jeżeli $f \in \mathfrak{m}_Q$, to $\phi(f) \in \mathfrak{m}_P$ (ϕ jest bowiem izomorfizmem), więc $f(\Phi(P)) = \phi(f)(P) = 0$ oraz $\Phi(P) \in Z(\mathfrak{m}_Q) = \{Q\}$

Analogicznie $im\, \Theta \subset Y$, $\Theta \circ \Phi = id$, $\Theta(Q) = P$. Oczywiście Θ oraz Φ są ciągłe (są zadane funkcjami wymiernymi).

Pozostaje dobrać otoczenia otwarte punktów P oraz Q, na których Θ oraz Φ będą wzajemnie odwrotne.

Bez straty ogólności (zastępując $U_{Q,Y}$ przez $U_{Q,Y} \cap \Theta^{-1}(U_{P,X})$) można założyć, że $U_{Q,Y} \subset \Theta^{-1}(U_{P,X})$. Niech $U := U_{Q,Y}$ oraz $V := \Theta^{-1}(U_{Q,Y}) = \Phi(U_{Q,Y})$ – wtedy $\Phi : U \to V$ oraz $\Theta : V \to U$ są wzajemnie odwrotne, więc $U \cong V$.

1.4.8

(a)

(b) niech C będzie dowolną krzywą, zaś $f : C \to \mathbb{P}^1$ dowolną bijekcją. Zauważmy, że zbiory domknięte w $\mathbb{P}^1$ to zbiory skończone. Ale obraz/przeciwobraz zbioru skończonego jest skończony, wystarczy więc wykazać, że zbiory domknięte w C to zbiory skończone. Istotnie, każdy zbiór domknięty jest skończoną sumą nierozkładalnych. Jeżeli zaś pewien podzbiór C jest nierozkładalny, to musi on być podrozmaitością wymiaru 0 (jedyna podrozmaitość wymiaru 1 to całe C), czyli punktem. To kończy dowód.

1.4.9 Będziemy potrzebowali twierdzenia o elemencie pierwotnym w mocniejszej wersji niż podana w książce:

Twierdzenie o elemencie pierwotnym
Jeżeli F jest ciałem, zaś $\alpha, \beta \in F^{sep}$, to dla **prawie wszystkich** $a \in F$ mamy: $F(\alpha, \beta) = F(\alpha + a\beta)$.

Wniosek
Jeżeli $k \subset F$ są nieskończonymi ciałami, oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F^{sep}$, to istnieją $a_1, \dots, a_m \in k$ takie, że $F(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = F(a_1\alpha_1 + \dots + a_m\alpha_m)$.
Dowód: indukcja po m : dla $m = 1$ nie ma czego dowodzić. Z założenia indukcyjnego, istnieją $a'_1, \dots, a'_{m-1} \in k$ takie, że mamy: $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) = F(a'_1\alpha_1 + \dots + a'_{m-1}\alpha_{m-1})$. Z powyższego twierdzenia, ponieważ $|k| = \infty$, to istnieje $a \in k$ takie, że

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = F(a'_1\alpha_1 + \dots + a'_{m-1}\alpha_{m-1}, \alpha_m) = F(a'_1\alpha_1 + \dots + a'_{m-1}\alpha_{m-1} + a\alpha_m)$$

co kończy dowód.

Bez straty ogólności możemy założyć, że X jest rozmaitością afiniczną. Niech $K(X) = k(x_1, \dots, x_n)$, gdzie x_i są funkcjami współrzędnymi „indukowanymi” z danego zanurzenia w $\mathbb{P}^n$. Wtedy z twierdzeń 4.8 A oraz 4.7A możemy bez straty ogólności założyć, że $x_1, \dots, x_r$ tworzą rozdzielczą bazę transcendentną. tzn. że

$$k(x_1, \dots, x_r)(x_{r+1}, \dots, x_n)/k(x_1, \dots, x_r)$$

jest skończonym rozdzielczym rozszerzeniem. Z powyższego **Wniosku** wiemy, że dla $y = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i x_i$ (dla pewnych $\alpha_i \in k$) mamy:

$$k(x_1, \dots, x_r)(x_{r+1}, \dots, x_n) = k(x_1, \dots, x_r)(y)$$

Bez straty ogólności możemy założyć (po liniowej zamianie zmiennych), że $y = x_{r+1}$. Zauważmy, że $r + 1 < n$, więc $x_n \neq x_{r+1}$. Rzutowanie z punktu $P = (0, 0, \dots, 0, 1)$ na płaszczyznę $\mathbb{A}^n = \{x_n = 0\}$ jest dane wzorem: $\phi(p_1, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_{n-1})$ oraz indukuje naturalne zanurzenie: $K(X') = k(x_1, \dots, x_{n-1}) \hookrightarrow k(x_1, \dots, x_n) = K(X)$. Zanurzenie to jednak jest na, bo $x_{r+1} \in k(x_1, \dots, x_{n-1})$ oraz: $K(X) = k(x_1, \dots, x_r)(x_{r+1}) \subset k(x_1, \dots, x_{n-1}) = K(X')$. Równość $K(X) = K(X')$ oznacza, że X oraz X' są biwymierne.

1.4.10 Zbiór $\varphi^{-1}(Y) \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ zadany jest równaniami: $y^2 = x^3$ oraz $xu = ty$. Niech $\widetilde{Y}_1 = \widetilde{Y} \cap \{t \neq 0\}$, zaś $\widetilde{Y}_2 = \widetilde{Y} \cap \{u \neq 0\}$ – wtedy $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}_1 \cup \widetilde{Y}_2$.
Obliczmy $\widetilde{Y}_1$: niech $t \neq 0$, bez straty ogólności $t = 1$. Wtedy $\varphi^{-1}(Y) \cap \{t \neq 0\}$ dany jest wzorami: $y^2 = x^3$ oraz $xu = y$, czyli $x^2 \cdot u^2 = x^3$ oraz $xu = y$. Dzieląc przez x^2 (pochodzi to od przeciwobrazu $\mathcal{O}$), stwierdzamy, że $\widetilde{Y}_1$ jest zadane wzorami $u^2 = x$ oraz $xu = y$, czyli:

$$\widetilde{Y}_1 = D(t) \cap Z(u^2 - xt, xu - yt)$$

Analogicznie, $\varphi^{-1}(Y) \cap \{u \neq 0\}$ dane jest wzorami: $y^2 = x^3$ oraz $x = yt$, czyli $y^2 = y^3 \cdot t^3$ oraz $xu = y$. Dzieląc przez y^2 (pochodzi to od przeciwobrazu $\mathcal{O}$), stwierdzamy, że $\widetilde{Y}_2$ jest zadane wzorami $1 = y \cdot t^3$ oraz $xu = y$.
Zauważmy, że $\widetilde{Y}_1 = \widetilde{Y}_2 \cup \{((0, 0), [1 : 0])\}$ – istotnie, jeżeli $((x, y), [t : u]) \in \widetilde{Y}_2 \backslash \widetilde{Y}_1$, to $t = 0$, co daje sprzeczność z równością $1 = y \cdot t^3$. Jeżeli zaś $((x, y), [t : u]) \in \widetilde{Y}_1 \backslash \widetilde{Y}_2$, to $u = 0$, więc $0 = x^3$ oraz $0 = y$, czyli $((x, y), [t : u]) = ((0, 0), [1 : 0])$.
Stąd $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}_1 \cup \widetilde{Y}_2 = \widetilde{Y}_1$. Ale $\widetilde{Y}_1 \cong \mathbb{A}^1$, izomorfizmy zadane są przez:

$$\widetilde{Y}_1 \ni ((x, y), [t : u]) \mapsto u \in \mathbb{A}^1 \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{A}^1 \ni u \mapsto ((u^2, u^3), [1 : u]) \in \widetilde{Y}_1$$

Podrozdział 1.5

1.5.3

(a) Niech $P = (0,0)$ oraz $f = f_1 + \ldots$ będzie rozkładem na części jednorodne. Wtedy $f_1 = \sum_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(P) \cdot X_i$, więc:

$$\mu_P(Y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f_1 = \sum_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(P) \cdot X_i \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_n}(P)\right) \neq (0,0,\ldots,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{(z definicji) } P \text{ nie jest osobliwy}$$

(b) w każdym z podpunktów punktem osobliwym jest $(0,0)$, wystarczy więc odczytać numer największej niezerowej części jednorodnej – odpowiedzi to kolejno: $2, 2, 2, 3$.

1.5.4

(a) **skończoność** $(Y \cdot Z)_P$**:**
zauważmy, że $(\mathcal{O}_P/(f,g))$ ma skończoną długość jako $\mathcal{O}_P$-moduł wtw. gdy jest pierścieniem Aritnowskim, czyli wtw. gdy (Atiyah-MacDonald, Twierdzenie 8.5) jest noetherowski i wymiaru 0. Noetherowskość jest oczywista (jest to skończona algebra nad ciałem). Aby wykazać, że wymiar to 0, załóżmy nie wprost, że istnieje ideał pierwszy $(f,g) \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_P$. Mamy jednak: z twierdzenia Krulla o ideałach głównych: $ht((f)) = ht((g)) = 1$ oraz (np. z zadania 3.12) $\dim \mathcal{O}_P = \dim \mathbb{A}^2 = 2$, więc $0 \subset (f) \subset \mathfrak{m}_P$ jest maksymalnym łańcuchem ideałów pierwszych. Rozważając łańcuch $0 \subset (f) \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}_P$ dostajemy sprzeczność.

nierówność $(Y \cdot Z)_P \geqslant \mu_P(Y) \cdot \mu_P(Z)$**:**

(z pomocą [**Fulton, William Fulton – Algebraic Curves: An introduction to Algebraic Geometry**])

Niech $P = (0,0)$, $Y : f = 0$, $Z : g = 0$, $\mu_P(Y) = a$, $\mu_P(Z) = b$.

Lemat $\text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^r) = 1 + 2 + \ldots + r = \frac{r(r+1)}{2}$.
Dowód: z filtracji $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^r \supset \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^r \supset \mathfrak{m}_P^2/\mathfrak{m}_P^r \supset \ldots \supset \mathfrak{m}_P^{r-1}/\mathfrak{m}_P^r \supset 0$ dostajemy:

$$\text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^r) = \sum_{i=0}^{r-1} \text{length}_{\mathcal{O}_P}((\mathfrak{m}_P^i/\mathfrak{m}_P^r)/(\mathfrak{m}_P^{i+1}/\mathfrak{m}_P^r)) = \sum_{i=0}^{r-1} \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathfrak{m}_P^i/\mathfrak{m}_P^{i+1})$$

Ale

$$\mathfrak{m}_P^i/\mathfrak{m}_P^{i+1} = \overline{x}^i \cdot k \oplus \overline{x}^{i-1}\overline{y} \cdot k \oplus \ldots \oplus \overline{xy}^{i-1} \cdot k \oplus \overline{y}^i \cdot k$$

więc $\text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathfrak{m}_P^i/\mathfrak{m}_P^{i+1}) = \dim_{\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P}(\mathfrak{m}_P^i/\mathfrak{m}_P^{i+1}) = \dim_k(\mathfrak{m}_P^i/\mathfrak{m}_P^{i+1}) = i + 1$.

Mamy: $\text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/(f,g)) \geqslant \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/(f,g,\mathfrak{m}_P^{a+b}))$, bo $(\mathcal{O}_P/(f,g,\mathfrak{m}_P^{a+b}))$ jest modułem ilorazowym $(\mathcal{O}_P/(f,g))$.
Rozważmy ciąg dokładny $\mathcal{O}_P$-modułów:

$$\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^b \times \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^a \quad \xrightarrow{\alpha} \quad \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^{a+b} \quad \xrightarrow{\beta} \quad \mathcal{O}_P/(f,g,\mathfrak{m}_P^{a+b}) \to 0$$

gdzie $\alpha(\overline{A(x,y)}, \overline{B(x,y)}) = \overline{A(x,y)f(x,y) + B(x,y)g(x,y)}$ (warunki $f \in \mathfrak{m}_P^a$, $g \in \mathfrak{m}_P^b$ łatwo implikują, że α jest dobrze określone), zaś β jest naturalnym odwzorowaniem ilorazowym. Istotnie, sprawdźmy dokładność:

- $(\beta \circ \alpha)(A,B) = \overline{Af} + \overline{B}\overline{g} \equiv 0 \pmod{(f,g,\mathfrak{m}_P^{a+b})}$, więc $im\,\alpha \subset \ker\beta$,
- jeżeli $\beta(\overline{h}) = 0$, to $\overline{h} \in (f,g,\mathfrak{m}_P^{a+b})$, więc $h = Af + Bg + h_1$ dla $h \in \mathfrak{m}_P^{a+b}$, czyli $\overline{h} = \alpha(\overline{A}, \overline{B})$.

Stąd, z addytywności długości dla ciągu: $0 \to \ker\beta \to \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^{a+b} \to \mathcal{O}_P/(f,g,\mathfrak{m}_P^{a+b})$ oraz z dokładności powyższego ciągu:

$$\begin{aligned}\text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/(f,g,\mathfrak{m}_P^{a+b})) &= \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^{a+b}) - \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\ker\beta) = \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^{a+b}) - \text{length}_{\mathcal{O}_P}(Im\,\alpha) \geqslant \\ &\geqslant \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^{a+b}) - \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^b \times \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^a) = \\ &= \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^{a+b}) - \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^a) - \text{length}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P^b) = \\ &= \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} - \frac{a(a+1)}{2} - \frac{b(b+1)}{2} = ab\end{aligned}$$

(b)

Lemat Dla $Y : f(x,y) = 0, \qquad L : y = \alpha x + \beta$, $P = (a,b)$ mamy:

$$(L \cdot Y)_P = \text{krotność } a \text{ jako pierwiastka wielomianu } f(x, \alpha x + \beta)$$

Dowód: podstawiając $x \mapsto x - a$, $y \mapsto y - b$, możemy bez straty ogólności założyć, że $P = (0,0)$ – wtedy również $\beta = 0$. Zauważmy, że $y - \alpha x | f(x,y) - f(x,\alpha x)$, więc: $(f(x,y), y - \alpha x) = (f(x,\alpha x), y - \alpha x)$. Oczywiste jest, że

$$\frac{\mathcal{O}_P}{(f(x,\alpha x), y - \alpha x)} = \frac{k[x,y]_{(x,y)}}{(f(x,\alpha x), y - \alpha x)} \cong \frac{k[x]_{(x)}}{(f(x,\alpha x))}$$

(naturalna iniekcja $k[x]_{(x)}/(f(x,\alpha x)) \mapsto k[x,y]_{(x,y)}/(f(x,\alpha x), y - \alpha x)$ jest też surjekcją, bo y jest wyrażone przez x). Niech $f(x,\alpha x) = x^r \cdot f_1(x)$, gdzie $f_1(0) \neq 0$. Wtedy $f_1(x)$ jest odwracalne w $k[x]_{(x)}$ oraz $f(x,\alpha x) k[x]_{(x)} = x^r k[x]_{(x)}$. Ale $k[x]_{(x)}$ jest pierścieniem dyskretnej waluacji i wszystkie jego ideały to $(x), (x^2), (x^3), \dots$ - stąd łańcuch ideałów $(x^r) \subset (x^{r-1}) \subset \ldots \subset (x) \subset k[x]_{(x)}$ jest maksymalny oraz $(L \cdot Y)_{(0,0)} = length(\frac{k[x]_{(x)}}{x^r}) = r$, co kończy dowód lematu.

Bez straty ogólności $P = (0,0)$. Niech $f = f_r + \dots$ dla $f_r \neq 0$. Wtedy wielomian $f_r(1,t)$ jest niezerowy (w przeciwnym wypadku $f_r(x,y) = x^r \cdot f_r(1, y/x) \equiv 0$), ma więc skończenie wiele pierwiastków. Jeżeli α nie jest jego pierwiastkiem (czyli, równoważnie, jeżeli $y = \alpha x$ nie jest styczna do Y w P) to $f_r(x,\alpha x) = x^r f_r(1,\alpha)$ oraz

$$f(x,\alpha x) = x^r \cdot \big(f_r(1,\alpha) + f_{r+1}(1,\alpha) \cdot x + f_{r+2}(1,\alpha) \cdot x^2 + \dots\big)$$

więc 0 jest pierwiastkiem krotności r oraz $L_\alpha : y = \alpha x$ spełnia $(Y \cdot L_\alpha)_{(0,0)} = \mu_{(0,0)}(Y)$.

(c) Niech $f_d(x,y)$ będzie częścią jednorodną f największego stopnia. Bez straty ogólności (zmieniając współrzędne za pomocą rzutowych transformacji afinicznych danych macierzami 3×3) możemy założyć, że $L : y = 0$ oraz że $[1,0,0] \notin Y$ – wtedy wszystkie punkty przecięcia L oraz Y znajdują się w $\mathbb{A}^2$. Wartość „ujednorodnienia" wielomianu f w $[1,0,0]$ to: $f_d(1,0) \neq 0$. Stąd: $f_d(x,0) = f_d(1,0) \cdot x^d$ jest wielomianem stopnia d, więc również $\deg(f(x,0)) = d$. Z powyższego **Lematu** oraz Zasadniczego Twierdzenia Algebry:

$$\sum_{(a,b)} (Y \cdot L)_{(a,b)} = \sum_{(a,b)} (\text{krotność } a \text{ jako pierwiastka } f(x,0)) = \deg(f(x,0)) = d$$

1.5.6

(a) **node:** zbiór algebraiczny dany układem: $\begin{cases} xy &= x^6 + y^6 \\ xu &= ty \end{cases}$ (gdzie $[t,u] \in \mathbb{P}^1$, $[x,y] \in \mathbb{A}^2$) będzie miał dwie składowe – „rozdmuchaną" krzywą $\widetilde{Y}$ oraz prostą $x = y = 0$. Istotnie, bez straty ogólności przyjrzyjmy się części afinicznej dla $t \neq 0$. Podstawiając $t = 1$, a następnie równość $y = xu$ do pierwszego równania dostajemy: $x^2 \cdot (u - x^4 - x^6 u^6) = 0$, więc część afiniczna $\widetilde{Y}$ dana jest przez $\begin{cases} u &= x^4 + x^6 u^6 \\ xu &= y \end{cases}$. Licząc macierz Jacobiego dla tych równań, dostajemy:

$$\begin{bmatrix} -u & 1 & -x \\ -4x^3 & 0 & 1 - 6x^4 u^5 \end{bmatrix}$$

– macierz ta mogłaby mieć rząd 1 tylko gdyby drugie wiersz był zerowy, ale to nie jest możliwe dla $char\, k \neq 2$ (jeżeli $-4x^3 = 0$, to $1 - 6x^4 u^5 = 1$). Stąd ta część afiniczna $\widetilde{Y}$ jest nieosobliwa, podobnie sprawdzamy to dla części danej przez $u \neq 0$.

ostrze: analogicznie – rozpatrujemy zbiór algebraiczny dany układem: $\begin{cases} x^3 &= y^2 + x^4 + y^4 \\ xu &= ty \end{cases}$. Podstawiając $t = 1$ oraz $y = xu$ w pierwszym równaniu i wydzielając je przez x^2 dostajemy jedną z części afinicznych $\widetilde{Y}$ – jest ona zadana równaniami $x = u^2 + x^2 + x^2 u^4$ oraz $y = xu$. Analogicznie druga część jest zadana równaniami: $yt^3 = 1 + y^2 t^4 + y^2$ oraz $x = yt$. Macierze Jacobiego odpowiednich części to:

$$\begin{bmatrix} -u & 1 & -x \\ 1 - 2x - 2xu^4 & 0 & -2u - 4x^2 u^3 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 1 & -t & -y \\ 0 & t^3 - 2yt^4 - 2y & 3yt^2 - 3y^2 t^3 \end{bmatrix}$$

Jeżeli więc punkt (x, y, u) na pierwszej części byłby osobliwy, to:

$$\begin{cases} x &= u^2 + x^2 + x^2u^4 \\ 1 &= 2x + 2xu^4 \\ 2u &= -4x^2u^3 \end{cases}$$

Wtedy $x \neq 0$ (z drugiego równania) oraz $u \neq 0$ (z pierwszego równania byłoby wtedy $x = x^2$, zaś z drugiego: $1 = 2x$), więc z trzeciego równania: $u^2 = \frac{-1}{2x^2}$. Podstawiając to do pierwszego i drugiego równania:

$$\begin{cases} x &= \frac{-1}{2x^2} + x^2 + x^2 \cdot \frac{1}{4x^4} \\ 1 &= 2x + 2x \cdot \frac{1}{4x^4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^3 &= 4x^4 - 1 \\ 2x^3 &= 4x^4 + 1 \end{cases}$$

Dodając i odejmując te równania stronami dostajemy: $6x^3 = 8x^4$ oraz $-2x^3 = 2$, czyli $x = 2/3$ oraz $x^3 = 1$ – sprzeczność oznacza, że pierwsza część jest nieosobliwa.

Dla drugiej części dostajemy analogiczny układ:

$$\begin{cases} yt^3 &= 1 + y^2t^4 + y^2 \\ t^3 &= 2yt^4 + 2y \\ 3yt^2 &= 3y^2t^3 \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że $t, y \neq 0$. Z trzeciego równania mamy więc $yt = 1$ – podstawiając to do pierwszego i drugiego dostajemy $t^2 = -1$ oraz $t^4 = -2$ – sprzeczność oznacza, że druga część jest nieosobliwa.

(b) bez straty ogólności załóżmy, że $P = (0, 0)$ jest nodem dla $Y : f(x, y) = 0$, zaś proste styczne w P dane są wzorami: $y = \alpha x$, $y = \alpha' x$ dla $\alpha \neq \alpha'$; tzn. $f(x, y) = (\alpha x - y) \cdot (\alpha' x - y) + f_3(x, y) + f_4(x, y) + \ldots$. Wtedy zbiór algebraiczny dany układem: $\begin{cases} f(x, y) &= 0 \\ xu &= ty \end{cases}$ (gdzie $[t, u] \in \mathbb{P}^1$, $[x, y] \in \mathbb{A}^2$) będzie miał dwie składowe – „rozdmuchaną” krzywą $\widetilde{Y}$ oraz prostą $x = y = 0$. Rozważmy składową afiniczną dla $t = 1$. Podstawiając $y = xu$ do pierwszego równania:

$$0 = f(x, xu) = x^2 \cdot \big(f_2(1, u) + x \cdot f_3(1, u) + x^2 \cdot f_3(1, u) + \ldots\big)$$

Stąd część afiniczna $\widetilde{Y}$ jest dana równaniami: $0 = \sum_{i \geqslant 2} f_i(1, u)x^{i-2}$ oraz $y = xu$. Podstawiając $x = y = 0$ dostajemy $0 = f_2(1, u) = (u - \alpha) \cdot (u - \alpha')$, więc do przeciwobrazu $(0, 0)$ należą punkty $(x, y, u) = (0, 0, \alpha), (0, 0, \alpha')$. Sprawdzając drugą składową afiniczną ($u \neq 0$) nie dostajemy innych punktów w przeciwobrazie. Aby sprawdzić, że są one nieosobliwe, zauważmy, że macierz Jacobiego (na części afinicznej) dana jest wzorem:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i \geqslant 1} i f_{i+2}(1, u)x^{i-1} & 0 & \sum_{i \geqslant 2} x^{i-2} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial u}(1, u) \\ -u & 1 & -x \end{bmatrix}$$

i podstawiając $(x, y, u) = (0, 0, \alpha)$ dostajemy:

$$\begin{bmatrix} f_3(1, u) & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u}(1, \alpha) \\ -u & 1 & -x \end{bmatrix}$$

zaś $\frac{\partial f_2}{\partial u}(1, \alpha) \neq 0$, bo α nie jest podwójnym pierwiastkiem. Stąd macierz ta ma rząd 2, więc $(0, 0, \alpha)$ nie jest osobliwy.

(c) analogicznie jak poprzednio, $\widetilde{Y}$ ma dwie części afiniczne:

$$\begin{cases} x^2 \cdot (1 + u^4) &= 0 \\ y &= xu \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} t^2 - y^2 - y^2t^4 &= 0 \\ x &= yt \end{cases}$$

Podstawiając $(x, y) = (0, 0)$ nie dostaniemy rozwiązań w pierwszym układzie, zaś w drugim dostaniemy $t = 0$ – oznacza to, że na $\widetilde{Y}$ leży dokładnie jeden punkt z przeciwobrazu $(0, 0)$, mianowicie $(x, y, t) = (0, 0, 0)$. Druga część afiniczna jest w oczywisty sposób izomorficzna z krzywą $t^2 - y^2 - y^2t^4 = 0$ w $\mathbb{A}^2$, zaś punkt $(0, 0)$ na tej krzywej jest nodem (bo $f_2(y, t) = (t - y) \cdot (t + y)$).

(d) punkt $(0,0)$ jest trzykrotny, bo $f_1 = f_2 = 0$, $f_3 = y^3$.

Analogicznie jak poprzednio (podstawiając $y = xu$ i wydzielając równanie przez x^3, a następnie podstawiając $x = yt$ i wydzielając równanie przez y^3), $\widetilde{Y}$ ma dwie części afiniczne:

$$\begin{cases} u^3 &= x^2 \\ y &= xu \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} 1 &= y^2t^5 \\ x &= yt \end{cases}$$

Podstawiając $(x,y) = (0,0)$ stwierdzamy, że jedynym punktem w przeciwobrazie $(0,0)$ jest $(x,y,u) = (0,0,0)$ na pierwszej części. Jest to punkt podwójny (część dwujednorodna to x^2). Pierwsza część afiniczna jest izomorficzna z krzywą $u^3 = x^2$ w $\mathbb{A}^2$. Rozdmuchując tą krzywą:

$$\begin{cases} u &= \xi^2 \\ x &= u\xi \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x\eta^3 &= 1 \\ u &= x\eta \end{cases}$$

(gdzie $[\xi,\eta] \in \mathbb{P}^1$) jedyny przeciwobraz $(0,0)$ znajduje się na pierwszej części i jest on oczywiście nieosobliwy – krzywa $u = \xi^2$ w $\mathbb{A}^2$ jest gładka.

1.5.7 Niech $d = deg\, f$.

(a) jeżeli punkt $(x,y,z) \neq (0,0,0) \in \mathbb{A}^3$ byłby osobliwy na X, to punkt $(x,y,z) \in \mathbb{P}^2$ byłby osobliwy na Y (bo wtedy pochodne cząstkowe zerowałyby się na nim). Punkt $(0,0,0) \in X$ jest osobliwy, bo pochodne cząstkowe f są jednorodne stopnia $d-1 > 0$ – w szczególności zerują się na $(0,0,0)$.

(b) zbiór algebraiczny

$$\begin{cases} f(x,y,z) &= 0 \\ xY &= Xy \\ yZ &= Yz \\ zX &= Zx \end{cases}$$

(gdzie $[X,Y,Z] \in \mathbb{P}^2$) jest sumą $\widetilde{X}$ oraz przeciwobrazu 0. Rozważmy część afiniczną $\widetilde{X}_1$ tego zbioru zadaną przez $X \neq 0$. Podstawiając $X = 1$:

$$\begin{cases} f(x,y,z) &= 0 \\ xY &= y \\ yZ &= Yz \\ z &= Zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,xY,Zx) &= 0 \\ xY &= y \\ yZ &= Yz \\ z &= Zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^d \cdot f(1,Y,Z) &= 0 \\ xY &= y \\ z &= Zx \end{cases}$$

(równość $yZ = Yz$ wynika z równości $z = Zx$ oraz $xY = y$). Stąd $\widetilde{X}_1$ dane jest przez:

$$\begin{cases} f(1,Y,Z) &= 0 \\ xY &= y \\ z &= Zx \end{cases}$$

oraz $(x,y,z,Y,Z) \mapsto (x,Y,Z)$ zadaje izomorfizm z $\mathbb{A}^1 \times Y_1$ (gdzie Y_1 – część afiniczna Y, dana równaniem $f(1,Y,Z) = 0$). Iloczyn gładkich rozmaitości jest gładki (macierz Jacobiego iloczynu jest dana przez „sumę prostą" macierzy Jacobiego czynników, więc jej rząd jest sumą rzędów), więc $\widetilde{X}_1$ jest gładkie. Analogicznie sprawdzamy pozostałe kawałki afiniczne.

(c) z poprzedniego podpunktu widzimy, że $\varphi^{-1}(P)$ ma część afiniczną opisaną równaniami: $x = y = z = 0$ oraz $f(1,Y,Z) = 0$ dla $X = 1$, bądź równoważnie $x = y = z = 0$ oraz $f(X,Y,Z) = 0$ dla $X \neq 0$. Rozpatrując analogicznie pozostałe części afiniczne: $\varphi^{-1}(P)$ jest dane równaniami $f(X,Y,Z) = x = y = z = 0$ i jest izomorficzne z Y.

1.5.8 Zauważmy najpierw, że rząd macierzy $\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\|_{i,j}$ nie zależy od wyboru reprezentanta $P \in \mathbb{P}^n$. Istotnie, niech $P = [a_0,\ldots,a_n] = [\lambda\cdot a_0,\ldots,\lambda\cdot a_n]$ – wtedy wielomiany $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ dla $j = 1,\ldots$ są jednorodne stopnia deg $f_i - 1$, więc po podstawieniu odpowiednich reprezentantów wiersze macierzy $\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_0,\ldots,a_n)\|_{i,j}$ oraz $\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\lambda\cdot a_0,\ldots,\lambda\cdot a_n)\|_{i,j}$ będą różniły się o niezerowe skalary (potęgi λ), co oznacza, że mają one taki sam rząd.

Lemat (tożsamość Eulera) jeżeli f – jednorodny stopnia d, to $\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = d \cdot f$.
Dowód: obie strony równości są liniowe wg f, więc wystarczy ją sprawdzić dla jednomianów stopnia d. Ale dla $f = x_0^{a_0} \cdot \ldots x_n^{a_n}$:

$$\sum_i x_i \cdot a_i x_0^{a_0} \cdot x_i^{a_i - 1} \ldots x_n^{a_n} = \underbrace{\sum_i a_i}_{=d} \; x_0^{a_0} \cdot x_i^{a_i} \ldots x_n^{a_n} = d \cdot f$$

Bez straty ogólności niech $P = [a_0, \ldots, a_{n-1}, 1]$ – wtedy z tożsamości Eulera: $\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(P) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)$, co oznacza, że ostatnia kolumna w macierzy $\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\|_{\substack{1 \leqslant i \leqslant t,\\ 0 \leqslant j \leqslant n}}$ jest liniowo zależna od pozostałych – ma ona więc ten sam rząd co macierz: $\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\|_{\substack{1 \leqslant i \leqslant t,\\ 0 \leqslant j \leqslant n-1}}$ i teza wynika z definicji ze strony 39.

1.5.9 Załóżmy nie wprost, że f jest rozkładalny: $f = f_1 \cdot f_2$. Wtedy z zadania 3.7 krzywe $C_i = V(f_i)$ muszą przecinać się w pewnym punkcie P. Ale wtedy $f_1(P) = f_2(P) = 0$, więc:

$$\nabla f(P) = \nabla(f_1 f_2)(P) = f_1(P) \cdot \nabla(f_2)(P) + f_2(P) \cdot \nabla(f_1)(P) = 0$$

(gdzie $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n})$ to "gradient" f). Sprzeczność kończy dowód.

1.5.10

(a) Mamy: $\dim_k T_P(X) = \dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^* = \dim_k \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ (skończenie wymiarowe przestrzenie wektorowe są izomorficzne ze swoimi przestrzeniami dualnymi) oraz $\dim X = \dim \mathcal{O}_P$ (zadanie 1.3.12), więc teza jest przeformułowaniem Twierdzenia 1.5.2A.

(b) $\varphi : X \to Y$ indukuje homomorfizm k-algebr: $\varphi_P^* : \mathcal{O}_{\varphi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,X}$ (zadanie 3.3 (a)). Zauważmy, że $\varphi_P^*(\mathfrak{m}_{\varphi(P),Y}) \subset \mathfrak{m}_{P,X}$ oraz $\varphi_P^*(\mathfrak{m}_{\varphi(P),Y}^2) \subset \mathfrak{m}_{P,X}^2$ – istotnie, jeżeli $f(\varphi(P)) = 0$, to $\varphi_P^*(f)(P) = 0$, więc $\varphi_P^*(f) \in \mathfrak{m}_{P,Y}$. Druga inkluzja wynika z pierwszej i z tego, że f jest homomofizmem algebr. Stąd homomorfizm $\varphi_P^* : \mathfrak{m}_{\varphi(P),Y}/\mathfrak{m}_{\varphi(P),Y}^2 \to \mathfrak{m}_{P,X}/\mathfrak{m}_{P,X}^2$ jest dobrze określony. Z algebry liniowej wiemy więc, że mamy homomorfizm na przestrzeniach dualnych, w przeciwną stronę: $T_P(\varphi) : (\mathfrak{m}_{P,X}/\mathfrak{m}_{P,X}^2)^* \to (\mathfrak{m}_{\varphi(P),Y}/\mathfrak{m}_{\varphi(P),Y}^2)^*$

(c) niech $k[x,y]/(x - y^2) = k[\overline{x}, \overline{y}]$. Mamy: $\varphi(x,y) = x$, więc $\varphi_P^* : \mathcal{O}_{0,\mathbb{A}^1} \to \mathcal{O}_{(0,0),C}$ dane jest wzorem:

$$\mathcal{O}_{0,\mathbb{A}^1} = k[x]_{(x)} \ni \qquad f(x) \mapsto f(\overline{x}) \qquad \in \mathcal{O}_{(0,0),C} = (k[\overline{x}, \overline{y}])_{(x,y)}$$

Aby pokazać, że $T_P(\varphi) = 0$, wystarczy pokazać, że $\varphi_P^*(\mathfrak{m}_{0,\mathbb{A}^1}) \subset \mathfrak{m}_{(0,0),C}^2$ – wtedy dla dowolnego funkcjonału $\Phi : \mathfrak{m}_{0,\mathbb{A}^1}/\mathfrak{m}_{0,\mathbb{A}^1}^2 \to \mathfrak{m}_{(0,0),C}/\mathfrak{m}_{(0,0),C}^2$ będziemy mieli $T_P(\varphi)(\Phi) = \Phi \circ \varphi = 0$.

Zauważmy, że $\mathfrak{m}_{0,\mathbb{A}^1} = (x)$ oraz $\mathfrak{m}_{(0,0),C}^2 = (\overline{x}^2, \overline{xy}, \overline{y}^2)$. Niech $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \in \mathfrak{m}_{0,\mathbb{A}^1}$ – wtedy z równości $\overline{x} = \overline{y}^2$:

$$\varphi_P(f(x)) = \sum_{i \geqslant 1} a_i \overline{x}^i = \sum_{i \geqslant 1} a_i (\overline{y}^2)^i \in \mathfrak{m}_{(0,0),C}^2$$

co kończy dowód.

1.5.11 Rzutowanie to jest oczywiście dane wzorem: $\varphi(x,y,z,w) = (x,y,z)$. Niech $Z : y^2 z = x \cdot (x - z) \cdot (x + z)$.

Izomorfizm $Y \backslash \{(0,0,0,1)\} \leftrightarrow Z \backslash \{(1,0,-1)\}$**:**

Z układu równań definiujących Y: $\begin{cases} x \cdot (x - z) & = & y \cdot w \\ yz & = & (x+z) \cdot w \end{cases}$ dostajemy od razu: $(x+z)y \cdot w = y^2 z = x \cdot (x - z) \cdot (x + z)$, czyli (o ile mianowniki są niezerowe) $w = \frac{x \cdot (x-z)}{y} = \frac{yz}{x+z}$. Wynika stąd, że jeżeli $(x,y,z) \in im\,\varphi$, to $y^2 z = x \cdot (x - z) \cdot (x + z)$, tzn. $im\,\varphi \subset Z$. Na odwrót, niech $\psi : Z \backslash \{(1,0,-1)\} \to \mathbb{P}^3$,

$$\psi(x,y,z) = \begin{cases} (x, y, z, \frac{x \cdot (x-z)}{y}), & \text{dla } y \neq 0 \\ (x, y, z, \frac{yz}{x+z}), & \text{dla } x + z \neq 0 \end{cases}$$

(zauważmy, że jeżeli $y = 0$, $x + z = 0$, to $(x,y,z) = (x, 0, -x) = (1, 0, -1)$). Z poprzednich rozważań widać od razu, że $im\,\psi \subset Y$, $\psi \circ \varphi = id$, $\varphi \circ \psi = id$.

Uwaga: φ, ψ dają się przedłużyć do izomorfizmów między Y oraz Z, definiując:

$$\varphi(x,y,z,w) = \begin{cases} (x,y,z), & x \neq 0 \text{ lub } y \neq 0 \text{ lub } z \neq 0 \\ (1, \frac{x-z}{w}, \frac{w}{y+w}) & w \neq 0 \text{ oraz } y+w \neq 0 \end{cases}$$

(obie definicje zgadzają się na części wspólnej – z równań definiujących Y wynika, że $\frac{x-z}{w} = \frac{y}{x}$, $\frac{w}{y+w} = \frac{z}{x}$) oraz:

$$\psi(x,y,z) = \begin{cases} (x,y,z,\frac{x\cdot(x-z)}{y}), & \text{dla } y \neq 0 \\ (x,y,z,\frac{yz}{x+z}), & \text{dla } x+z \neq 0 \\ (xy, y^2, zy, x\cdot(x-z)), & \text{dla } x\cdot(x-z) \neq 0 \end{cases}$$

*(w gruncie rzeczy każde odwzorowanie wymierne z krzywej gładkiej da się przedłużyć do morfizmu, przemnażając w każdym punkcie współrzędne przez odpowiednie potęgi uniformizatora - **[Silverman, AEC, Proposition II.2.1.]**)*

Y **jest nierozkładalną gładką krzywą:**

Y jest izomorficzne z Z, więc wystarczy sprawdzić gładkość i nierozkładalność Z. W tym celu wystarczy (z zadania 5.9) zbadać wspólne zera pochodnych cząstkowych: $\begin{cases} -3x^2+z^2 &= 0 \\ 2yz &= 0 \\ y^2+2zx &= 0 \end{cases}$ Wtedy $y=0$ lub $z=0$ (druga równość). Jeżeli $z=0$, to $x=0$ (z pierwszej równości) – ale $(0,0,0) \notin \mathbb{P}^2$. Jeżeli jednak $y=0$, to (z 3. równości) $z=0$ lub $x=0$, więc $z=x=0$. Sprzeczność oznacza, że Z jest nierozkładalna i gładka.

1.5.13 Twierdzenia wystarczy dowieść dla rozmaitości afinicznych. Niech $A = A(X)$ będzie pierścieniem współrzędnych rozmaitości afinicznej X.

Niech C będzie domknięciem całkowitym A – wtedy z Twierdzenia 3.9A C jest skończenie generowane jako k-algebra. Ponadto C jest całkowite nad A, więc C jest skończonym A-modułem: $C = Ac_1 + \ldots + Ac_n$ dla $c_i \in Frac(A)$. Niech $a \in A\backslash\{0\}$ będzie iloczynem „mianowników” $c_1,\ldots,c_n$ – wtedy $\forall_i \quad ac_i \in A$, więc $aC \subset A$.

Rozważmy ilorazowy A-moduł C/A. Zauważmy najpierw, że punkt P nie jest normalny wtw. gdy $\mathfrak{m}_P \in Supp_A(C/A) := \{\mathfrak{p} \in Spec(A) : (C/A)_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$. Istotnie: P nie jest normalny $\Leftrightarrow$ $A_{\mathfrak{m}_P}$ nie jest całkowicie domknięty $\Leftrightarrow$ $A_{\mathfrak{m}_P} \neq C_{\mathfrak{m}_P}$ $\Leftrightarrow$ $(C/A)_{\mathfrak{m}_P} \neq 0$.

Ponadto C/A jest skończenie generowanym A-modułem, więc (fakt z wykładu z algebry przemiennej) $Supp_A(C/A) = V(Ann_A(C/A))$. Ale $Ann_A(C/A) \neq 0$, bo $a(C/A) = 0$ – stąd $V(Ann_A(C/A)) \neq Spec(A)$. Stąd zbiór punktów „nienormalnych” to $V(Ann_A(C/A))$ – jest to właściwy podzbiór domknięty X.

1.5.14

(a) niech $Y : f = 0$ oraz bez straty ogólności $P = (0,0)$. Wykażemy, że

$$\mu_P(Y) \quad = \quad \min\{i : \dim_k(\widehat{\mathfrak{m}}_P^i/\widehat{\mathfrak{m}}_P^{i+1}) < i+1\}$$

– równość ta będzie oznaczała, że $\mu_P(Y)$ zależy tylko od klasy izomorfizmu k-algebry $\widehat{\mathcal{O}}_{P,X}$.

Istotnie, niech $f = f_a + f_{a+1} + \ldots$ dla $f_a \neq 0$. Wtedy w pierścieniu $\widehat{\mathcal{O}}_{P,X}$ mamy:

$$f_a = -f_{a+1} - f_{a+2} - \ldots \in \widehat{\mathfrak{m}}_P^{a+1} \qquad \Rightarrow \qquad f_a \equiv 0 \pmod{\widehat{\mathfrak{m}}_P^{a+1}}$$

– dostajemy więc nietrywialną zależność k-liniową między jednomianami $x^a, x^{a-1}y, \ldots, xy^{a-1}, y^a$, generującymi $\widehat{\mathfrak{m}}_P^a/\widehat{\mathfrak{m}}_P^{a+1}$, więc $\dim_k(\widehat{\mathfrak{m}}_P^a/\widehat{\mathfrak{m}}_P^{a+1}) < a+1$.

Na odwrót, niech $b < a$ i załóżmy nie wprost, że $\dim_k(\widehat{\mathfrak{m}}_P^b/\widehat{\mathfrak{m}}_P^{b+1}) < b+1$ – wtedy jednomiany $x^b, x^{b-1}y, \ldots, xy^{b-1}, y^b$ byłyby k-liniowo zależne w $\widehat{\mathfrak{m}}_P^b/\widehat{\mathfrak{m}}_P^{b+1}$, tzn.

$$\sum_i \alpha_i x^i y^{b-i} \equiv 0 \pmod{\widehat{\mathfrak{m}}_P^{b+1}}$$

Wtedy jednak w $k[[x,y]]$ musielibyśmy mieć:

$$\sum_i \alpha_i x^i y^{b-i} + f(x,y)\cdot g(x,y) \in (x,y)^{b+1}$$

co nie jest możliwe, bo $f(x,y)\cdot g(x,y)$ ma wszystkie składniki jednorodne stopnia co najmniej a. To kończy dowód.

(b) (jest to wersja lematu Hensla, pozwalająca „podnieść” faktoryzację)

> **Lemat** Jeżeli g_s, h_t – jednorodne stopni s, t i względnie pierwsze, to $(g_s, h_t) \supset \mathfrak{m}_P^{s+t}$.
> **Dowód:** Istotnie, ustalmy i; pokażemy, że $x^i y^{s+t-i} \in (g_s, h_t)$. Mamy $NWD(g_s, h_t) = 1$, więc również (z jednorodności) $NWD(g_s(x,1), h_t(x,1)) = 1$. Stąd istnieją $G(x), H(x)$ takie, że $G(x)g_s(x,1)+H(x)h_t(x,1) = x^i$ oraz $\deg G < t-i$, $\deg H < s-i$, („Bézout's identity”). Po ujednorodnieniu:
>
> $$\left(y^{t-i}G\left(\frac{x}{y}\right)\right) \cdot g_s(x,y) + \left(y^{s-i}H\left(\frac{x}{y}\right)\right) \cdot h_t(x,y) = x^i y^{s+t-i}$$
>
> gdzie (z warunków na stopień) $y^{t-i}G(x/y)$, $y^{s-i}H(x/y)$ są wielomianami.

Aby dostać tezę, wystarczy wykazać indukcyjnie, że istnieją takie jednorodne $g_s, g_{s+1}, \ldots, h_t, h_{t+1}, \ldots$ że $f_k = \sum_{a+b=k} g_a h_b$ (przyjmuję $g_i = h_j = 0$ dla $i < s$, $j < t$). Dla $k = r$ teza jest spełniona z założenia: $f_r = g_s h_t$. Załóżmy, że wybraliśmy $g_s, g_{s+1}, \ldots, g_{s+m}$, $h_t, h_{t+1}, \ldots, h_{t+m}$. Wtedy mamy mieć: $f_{r+m+1} = g_{s+m+1}h_t + g_{s+m}h_{t+1} + \ldots + g_s h_{t+m+1}$ – dostajemy więc równanie z dwiema niewiadomymi (g_{s+m+1}, h_{t+m+1}):

$$g_{s+m+1}h_t + g_s h_{t+m+1} = \underbrace{f_{r+m+1} - \sum_{j=1}^{m} g_{s+m+1-j}h_{j+t}}_{=:F}$$

(gdzie F – jednorodny st. $(r+m+1)$). Z warunku $(g_s, h_t) \supset \mathfrak{m}_P^{s+t} \ni F$ widzimy, że istnieją A, B spełniające $Ah_t + Bg_s = F$ i wystarczy wziąć odpowiednie części jednorodne: $g_{s+m+1} = A_{s+m+1}$, $h_{t+m+1} = B_{t+m+1}$

(c) udowodnimy najpierw lemat zostawiony w Przykładzie (5.3.6) bez dowodu:

> **Lemat:** Jeżeli $f = f_1+f_2+\ldots \in k[[x,y]]$, $g = g_1+g_2+\ldots \in k[[x,y]]$ oraz $f_1(x,y) = ax+by$, $g_1(x,y) = cx+dy$ są liniowo niezależne, to endomorfizm algebry $k[[x,y]]$ dany przez: $\Phi(x) = f(x,y)$, $\Phi(y) = g(x,y)$ jest automorfizmem.
> **Dowód:** łatwo zauważyć, że aby istniał Ψ spełniający $\Psi \circ \Phi = \Phi \circ \Psi = id$, muszą istnieć $A(x,y), B(x,y) \in k[[x,y]]$ spełniające:
>
> $$\begin{cases} f(A(x,y), B(x,y)) & = & x \\ g(A(x,y), B(x,y)) & = & y \end{cases}$$
>
> – wtedy wystarczy przyjąć $\Psi(x) = A(x,y)$, $\Psi(y) = B(x,y)$. Zdefiniujemy ciąg $(A_n(x,y))$, $(B_n(x,y))$ spełniający:
>
> $$\begin{cases} f(A_n, B_n) & \equiv & x \pmod{(x,y)^{n+1}} \\ g(A_n, B_n) & \equiv & y \pmod{(x,y)^{n+1}} \end{cases}, \quad A_{n+1} \equiv A_n \pmod{(x,y)^n}, \quad B_{n+1} \equiv B_n \pmod{(x,y)^n}$$
>
> Dla $n = 1$, zakładając że $A, B \in (x,y)$, mamy: $f(A_1, B_1) \equiv f_1(A_1, B_1) = aA_1 + bB_1 \pmod{(x,y)^2}$, $g(A_1, B_1) \equiv g_1(A_1, B_1) = cA_1 + dB_1$. Z liniowej niezależności stwierdzamy jednak, że układ kongruencji:
>
> $$\begin{cases} aA_1 + bB_1 & \equiv & x \pmod{(x,y)^2} \\ cA_1 + dB_1 & \equiv & y \pmod{(x,y)^2} \end{cases}$$
>
> ma dokładnie jedno rozwiązanie (A_1, B_1). Załóżmy, że skonstruowaliśmy (A_n, B_n). Znajdziemy a_{n+1}, b_{n+1} – jednorodne stopnia $n+1$ takie, że $A_{n+1} := A_n + a_{n+1}$, $B_{n+1} := B_n + b_{n+1}$ spełniają założenia. Z dwumianu Newtona mamy:
>
> $$\begin{cases} f(A_n + a_{n+1}, B_n + b_{n+1}) & \equiv & f(A_n, B_n) + f_1(a_{n+1}, b_{n+1}) \pmod{(x,y)^{n+2}} \\ g(A_n + a_{n+1}, B_n + b_{n+1}) & \equiv & g(A_n, B_n) + g_1(a_{n+1}, b_{n+1}) \pmod{(x,y)^{n+2}} \end{cases}$$
>
> Dostajemy więc układ kongruencji:
>
> $$\begin{cases} aa_{n+1} + bb_{n+1} \equiv x - f(A_n, B_n) \pmod{(x,y)^{n+2}} \\ ca_{n+1} + db_{n+1} \equiv y - g(A_n, B_n) \pmod{(x,y)^{n+2}} \end{cases}$$

który znowu ma dokładnie jedno rozwiązanie (a_{n+1}, b_{n+1}). Warunki

$$f(A_n, B_n) \equiv x \pmod{(x,y)^{n+1}}, \qquad g(A_n, B_n) \equiv y \pmod{(x,y)^{n+1}}$$

zapewniają przy tym, że a_{n+1}, b_{n+1} są jednorodne stopnia $(n+1)$.

1. zwykłe punkty podwójne:

po liniowej zamianie zmiennych, można założyć, że $f(x,y) = xy + f_3 + \ldots$. Wtedy z poprzedniego podpunktu: $f = gh = (x + g_2 + \ldots) \cdot (y + h_3 + \ldots)$. Z **lematu** istnieje automorfizm $\Phi : k[[x,y]] \to k[[x,y]]$, spełniający $\Phi(g) = x$, $\Phi(h) = y$ – indukuje on izomorfizm

$$\widetilde{\mathcal{O}}_{P,X} = k[[x,y]]/(gh) \cong k[[x,y]]/(xy)$$

2. zwykłe punkty potrójne:

po liniowej zamianie zmiennych, można założyć, że $f(x,y) = c \cdot xy \cdot (x+y) + f_3 + \ldots$ dla $c \neq 0$, bez straty ogólności $c = 1$. Wtedy z poprzedniego podpunktu: $f = FGH = (x + F_2 + F_3 + \ldots) \cdot (y + G_2 + G_3 + \ldots) \cdot (x + y + H_2 + H_3 + \ldots)$. Z **lematu** istnieje automorfizm $\Phi : k[[x,y]] \to k[[x,y]]$, spełniający $\Phi(F) = x$, $\Phi(G) = y$.

Niech $h(x,y) := \Phi(H)$. Z dowodu **lematu** wynika łatwo, że $\Phi(x) \equiv x \pmod{(x,y)^2}$, $\Phi(y) \equiv y \pmod{(x,y)^2}$; stąd $h(x,y) = H(\Phi(x), \Phi(y)) \equiv \Phi(x) + \Phi(y) \equiv x + y \pmod{(x,y)^2}$.

Zauważmy, że Φ indukuje izomorfizm

$$\widehat{\mathcal{O}}_{P,X} = k[[x,y]]/(FGH) \cong k[[x,y]]/(xy \cdot h(x,y))$$

Grupując zmienne w dowolny sposób:

$$h(x,y) := \Phi(H) = x \cdot (1 + \ldots) + y \cdot (1 + \ldots) = x \cdot A(x,y) + y \cdot B(x,y)$$

Korzystając znowu z **lematu**, istnieje taki automorfizm $\Gamma : k[[x,y]] \to k[[x,y]]$, że $\Gamma(xA) = x$, $\Gamma(yB) = y$ – stąd dla $A' := \Gamma(A)$, $B' := \Gamma(B)$:

$$\widehat{\mathcal{O}}_{P,X} \cong \frac{k[[x,y]]}{(xy \cdot h(x,y))} \cong \frac{k[[x,y]]}{(xy \cdot (xA + yB))} \cong \frac{k[[x,y]]}{(\frac{1}{A'}x \cdot \frac{1}{B'}y \cdot (x+y))} = \frac{k[[x,y]]}{(x \cdot y \cdot (x+y))}$$

(ostatnia równość wynika z tego, że A', B' są odwracalne, bo $A, B \in k[[x,y]] \backslash (x,y) = k[[x,y]]^*$).

3. zwykłe punkty poczwórne: *przykładowa rodzina odpowiednich pierścieni lokalnych to* $k[[x,y]]/(xy(x+y) \cdot (x + \alpha y))$ – *brak dowodu, że są one różne*

(d) **istnienie:**

niech $Y : f = 0$, $\mu_P(Y) = 2$. Po liniowej zamianie zmiennych: $P = (0,0)$, $f = y^2 + f_3 + \ldots$. Skorzystamy z:

Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa Jeżeli $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i x_1^i f_i(x_2, \ldots, x_n) \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$ oraz $f_k(0, 0, \ldots, 0) = 0$ dla $k < m$, $f_m(0, 0, \ldots, 0) = 0$, to

$$f(x_1, \ldots, x_n) = W(x_1, \ldots, x_n) \cdot \left(x_1^m + g_{m-1}(x_2, \ldots)x_1^{m-1} + \ldots\right)$$

gdzie $W(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ oraz $g_i(0, \ldots, 0) = 0 \qquad \forall_i$.

Zgodnie z tym twierdzeniem: $f(x,y) = W(x,y) \cdot (y^2 + p(x)y + q(x))$ dla $W(0,0) \neq 0$, czyli $W \in k[[x,y]]^*$. Podstawiając $y \mapsto y + \frac{p(x)}{2}$ możemy bez straty ogólności założyć, że $p(x) \equiv 0$. Niech $q(x) = x^r \cdot Q(x)$ dla $Q(x) \neq 0$. Wtedy $Q(x) = R(x)^r$ dla pewnego $R \in k[[x]]$ ($Q(x)^{1/k} = c \cdot (1 + ax + \ldots)^{1/k} = \sum c_i x_i$, bo $(1+t)^{1/k} = \sum_i t^i$ jest szeregiem potęgowym). Stąd:

$$\widehat{\mathcal{O}}_{P,Y} = \frac{k[[x,y]]}{(f(x,y))} = \frac{k[[x,y]]}{(y^2 + (x \cdot Q(x))^r)} \cong \frac{k[[x',y]]}{(y^2 + x'^r)}$$

(na podstawie **Lematu** możemy wybrać automorfizm zamieniający x na $x' = x \cdot Q(x)$).

jednoznaczność: *brak dowodu*

1.5.15

(a) Jeżeli f jest nierozkładalny oraz $V(f) = V(g)$, to $(f) = \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)} \ni g$, więc $g = c \cdot f^r$ dla pewnego $c \in k$. Stąd równanie zbioru algebraicznego stopnia d jest dane jednoznacznie z dokładnością do stałej oraz potęgi czynników – to w oczywisty sposób daje tezę.

(b) utożsamiając każdy punkt $(a_i)_{i \in J} \in \mathbb{P}^N$ z wielomianem $f = \sum_{i \in J} a_i \mathbf{x}^{\alpha_j}$ (gdzie $\mathbf{x}^{\alpha_j} = x^{\alpha_{j,0}} \cdot y^{\alpha_{j,2}} \cdot z^{\alpha_{j,3}}$ jest odpowiednim jednomianem) i korzystając z teorii rugowników, stwierdzamy, że istnieją wielomiany $g_1, \ldots g_t \in k[a_1, \ldots]$ takie, że wielomiany jednorodne st. $d-1$: $\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}$ mają wspólne zero różne od $(0, 0, \ldots, 0)$ wtw. gdy $g_1(a_1, \ldots) = g_2(a_1, \ldots) = \ldots = 0$. Z zadań 5.9 oraz 5.8 wynika więc, że zbiór (nierozkładalnych) nieosobliwych krzywych można utożsamić ze zbiorem otwartym $\bigcup_{i=1}^t D(g_i)$. Z zadania 5.5 wynika, że jest on niepusty.

Podrozdział 1.6

1.6.1

(a) zgodnie z Corollary I.4.5, Y zawiera podzbiór otwarty U izomorficzny z pewnym podzbiorem otwartym $V \subset \mathbb{A}^1$ – niech $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to U$ będą izomorfizmami. Wtedy można je przedłużyć do morfizmów $\varphi : \overline{Y} \to \mathbb{P}^1$ oraz $\psi : \mathbb{P}^1 \to \overline{Y}$ (na podstawie Proposition I.6.8 lub **[Silverman, AEC, Proposition II.2.1]** – mnożąc współrzędne przez uniformizatory w każdym punkcie), które są izomorfizmami (są one wzajemnie odwrotne na otwartych zbiorach). Stąd Y można utożsamić z właściwym otwartym podzbiorem $\overline{Y} \cong \mathbb{P}^1$ oraz (usuwając punkt z $\mathbb{P}^1$ nie należący do obrazu Y) z otwartym podzbiorem $\overline{Y} \cong \mathbb{A}^1$.

(c) zgodnie z (a): $Y \cong \mathbb{A}^1 \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$ (każdy zbiór otwarty w $\mathbb{A}^1$ jest tej postaci), więc

$$A(Y) \cong A(\mathbb{A}^1 \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \in k(x) : \forall_i \quad g(a_i) \neq 0 \right\} = k[x]_{\mathfrak{m}_{a_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{m}_{a_n}}$$

($k[x]_{\mathfrak{m}_{a_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{m}_{a_n}}$ to lokalizacja na zbiorze multyplikatywnym $k[x] \backslash \mathfrak{m}_{a_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{m}_{a_n}$). Ale lokalizacja dziedziny ideałów głównych jest dziedziną id. głównych, jest więc w szczególności dziedziną z jednoznacznym rozkładem.

1.6.2

(a) jeżeli punkt $(x, y) \in Y$ byłby osobliwy, to spełniałby:

$$\begin{cases} y^2 &= x^3 - x \\ 2y &= 0 \\ 3x^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$

ale $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ nie spełnia pierwszego równania. Zauważmy, że punkt na krzywej jest nieosobliwy wtw. gdy jest normalny (bo jednowymiarowy pierścień lokalny jest całkowicie domknięty wtw. gdy jest DVR). Stąd wszystkie punkty Y są normalne, więc teza wynika z zadania 1.3.17.

(b) Niech $A(Y) = k[x, y]/(y^2 - x^3 + x) = k[\overline{x}, \overline{y}]$. Z poprzedniego podpunktu $A(Y)$ jest całkowicie domknięty, więc jest zawarty w domknięciu całkowitym $k[\overline{x}]$. Ponadto $\overline{y}$ jest oczywiście całkowite nad $k[\overline{x}]$ (spełnia $\overline{y}^2 = \overline{x}^3 - \overline{x}$), więc $A(Y) = k[\overline{x}][\overline{y}]$ jest domknięciem całkowitym $k[\overline{x}]$.

(c) Teza wynika z teorii Galois – $A(Y) = k[\overline{x}][\overline{y}] = k[x][\sqrt{x^3 - x}]$ jest kwadratowym rozszerzeniem $k[x]$, jest więc Galois oraz $Gal(A(Y)/k[x]) = \{id, \sigma\}$ dla $\sigma(y) = -y$. Własności funkcji N wynikają z własności normy z teorii Galois.

(d) dowolny element $A(Y)$ jest postaci $f(\overline{x}) + \overline{y}g(\overline{x})$. Zauważmy, że

jeżeli dla $a \in A(Y)$ mamy $\deg(N(a)) \leqslant 1$, to $a \in k^*$. (*)

Istotnie, niech $a = f(\overline{x}) + \overline{y}g(\overline{x})$, $N(a) = h(\overline{x})$ dla $\deg h \leqslant 1$. Wtedy:

$$N(f(\overline{x}) + \overline{y}g(\overline{x})) = f(\overline{x})^2 - (\overline{x}^3 - \overline{x})g(\overline{x})^2 = h(\overline{x})$$

Jeżeli jednak $g \neq 0$, to z równości $f(\overline{x})^2 = (\overline{x}^3 - \overline{x})g(\overline{x})^2 + h(\overline{x})$ mamy: $2\deg(f) = 3 + 2\deg(g)$, co jest niemożliwe, bo $2 \nmid 3$. Stąd $g = 0$, $f(\overline{x})^2 = h(\overline{x})$, więc $f = const.$, $a = f(\overline{x}) \in k^*$.

Jedności $A(Y)$**:** mamy: $a \in A(Y)^* \Leftrightarrow \quad N(a) \in k[\overline{x}]^* = k \Leftrightarrow \quad \deg N(a) = 0 \Leftrightarrow \quad a \in k^*$ na mocy (*).

Nierozkładalność x**:** załóżmy nie wprost, że $\overline{x} = a \cdot b$ dla $a, b \in A(Y) \backslash k$. Wtedy $N(a) \cdot N(b) = N(\overline{x}) = \overline{x}^2$, więc $\deg N(a) = \deg N(b) = 1$ – sprzeczność z (*).

Nierozkładalność y**:** załóżmy nie wprost, że $\overline{y} = a \cdot b$ dla $a, b \in A(Y) \backslash k$. Wtedy $N(a) \cdot N(b) = N(\overline{y}) = -\overline{y}^2 = \overline{x} - \overline{x}^3$, więc $\deg N(a) = 1$ lub $\deg N(b) = 1$ – sprzeczność z (*).

$A(Y)$ **nie jest UFD:** $\overline{y}^2 = \overline{x} \cdot (\overline{x}-1) \cdot (\overline{x}+1)$ stanowi dwa różne rozkłady na elementy nierozkładalne (analogicznie jak wyżej pokazujemy, że $\overline{x} \pm 1$ jest nierozkładalne).

(e) teza wynika z zadania 6.1(c) – $A(Y)$ nie jest UFD, więc Y nie jest wymierna.

1.6.4 Niech $P \in Y$. Wtedy, jako że P jest nieosobliwy, to $\mathcal{O}_P$ jest pierścieniem dyskretnej waluacji. Stąd $f \in \mathcal{O}_P$ lub $1/f \in \mathcal{O}_P$. Stąd możemy zdefiniować:

$$\varphi(P) = \begin{cases} (f(P), 1), & \text{dla } f \in \mathcal{O}_P \\ (1, \frac{1}{f(P)}), & \text{dla } 1/f \in \mathcal{O}_P \end{cases} \quad \text{– jest to wtedy dobrze określony morfizm.}$$

Surjektywność: Zauważmy, że $[1, 0] \in im\, \varphi$ (f musi mieć przynajmniej jeden biegun, bo $\mathcal{O}(Y) = k$). Ponadto $\forall_a \quad [a, 1] \in im\, \varphi$ – w przeciwnym wypadku funkcja $\frac{1}{f-a}$ byłaby regularna na Y, co jest niemożliwe, bo $\mathcal{O}(Y) = k$.

Skończoność przeciwobrazu: zbiory domknięte na krzywych to dokładnie zbiory skończone. Stąd przeciwobraz zbioru domkniętego $f^{-1}(P)$ jest domknięty, a więc skończony.

1.6.6

(a) oczywiste jest, że $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ jest morfizmem (po dodefiniowaniu: $\varphi((1, 0)) = \frac{a}{c}$). Ponadto, jeżeli $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$ oraz $\psi(x) := \frac{a'x+b'}{c'x+d'}$, to $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id$ (składanie ułamkowych transformacji rzutowych odpowiada składaniu odpowiednich macierzy).

(b) Zauważmy, że $k(x) = K(\mathbb{A}^1)$, więc elementy $k(x)$ są w bijekcji z biwymiernymi przekształceniami $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$. Ale z Proposition I.6.8 wynika, że każde przekształcenie wymierne z gładkiej krzywej rzutowej w rozmaitość rzutową można jednoznacznie przedłużyć do morfizmu – stąd elementy $k(x)$ odpowiadają automorfizmom $\mathbb{P}^1$.

(c) niech $\Gamma : k(x) \to k(x)$ będzie k-automorfizmem. Zauważmy, że dla $NWD(P(x), Q(x)) = 1$, $P, Q \in k[x]$ mamy: $[k(x) : k(P/Q)] = \max\{\deg, P, \deg Q\}$ (Dummit-Foote, twierdzenie z 14.9, str. 647). Ale $[k(x) : k(\Gamma(x))] = 1$, więc musimy mieć: $\Gamma(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Gdyby jednak $ad - bc = 0$, to $\Gamma(x)$ byłoby stałą oraz $\Gamma(k(x)) \subset k$. Sprzeczność kończy dowód.

1.6.7 Niech $\mathcal{O} = [1, 0] \in \mathbb{P}^1$ – wtedy $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 - \mathcal{O}$. Załóżmy bez straty ogólności (dodając $\mathcal{O}$ do $\{P_1, \ldots\}$ oraz $\{Q_1, \ldots\}$), że $\mathcal{O} = P_r = Q_s$ oraz niech

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \backslash \{P_1, \ldots, P_r\} \to \mathbb{P}^1 \backslash \{Q_1, \ldots, Q_s\}, \qquad \psi : \mathbb{P}^1 \backslash \{Q_1, \ldots, Q_s\} \to \mathbb{P}^1 \backslash \{P_1, \ldots, P_r\}$$

będą izomorfizmami. Wtedy z Proposition I.6.8 φ, ψ można przedłużyć na całe $\mathbb{P}^1$. Ponadto φ oraz ψ są wzajemnie odwrotne na zbiorach koskończonych (a więc otwartych), więc po przedłużeniu również są wzajemnie odwrotne (Lemma I.4.1), są więc automorfizmami $\mathbb{P}^1$. Stąd φ musi ustalać bijekcję między $\{P_1, \ldots, P_r\}$ oraz $\{Q_1, \ldots, Q_s\}$, więc $r = s$.

Twierdzenie odwrotne nie musi być prawdziwe. Z powyższych rozważań oraz zadania 1.6.6 wystarczy zastanowić się, czy dla każdych $P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots, Q_r$ istnieje ułamkowa transformacja rzutowa φ spełniająca $\varphi(\{P_1, \ldots, P_r\}) = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$. Wybierzmy dowolne różne punkty $P_1, \ldots, P_{10} \in \mathbb{A}^1$. Łatwo zauważyć, że dowolna ułamkowa transformacja rzutowa jest wyznaczona jednoznacznie przez wartości w 4 punktach. Stąd zbiór

$$\mathcal{A} := \left\{ \varphi : \qquad \{P_1, \ldots P_9\} \subset \{\varphi(P_1), \ldots \varphi(P_{10})\} \right\}$$

jest skończony. Wybierzmy $Q \in \mathbb{A}^1 \backslash \{\varphi(P_i) : i = 1, \ldots, 10, \varphi \in \mathcal{A}\}$ – wtedy:

$$\mathbb{A}^1 \backslash \{P_1, \ldots, P_{10}\} \ncong \mathbb{A}^1 \backslash \{P_1, \ldots, P_9, Q\}$$

(bo jeżeli $\varphi(\{P_1, \ldots, P_{10}\}) = \{P_1, \ldots, P_9, Q\}$, to $\varphi \in \mathcal{A}$, przecząc wyborowi Q).

Podrozdział 1.7

1.7.1

(a) Zauważmy, że pierścień jednorodny d-krotnego zanurzenia $\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ to: $S(\rho_d(\mathbb{P}^n)) = k[y_0, \dots, y_N]/\mathfrak{a}$ (oznaczenia z zadania 2.12). Przekształcenia zadane przez $y_i \mapsto M_i(x_0, \dots, x_N)$ w oczywisty sposób indukuje zanurzenie $S(\rho_d(\mathbb{P}^n)) \hookrightarrow k[x_0, \dots, x_n]$, którego obraz jest generowany (jako k-moduł) przez jednomiany stopnia podzielnego przez d (wykazałem to w zadaniu 2.12). Dostajemy więc izomorfizm: $S(\rho_d(\mathbb{P}^n))_l \cong k[x_0, \dots, x_n]_{dl} = S(\mathbb{P}^n)_{dl}$, więc $\varphi_{\rho_d(\mathbb{P}^n)}(l) = \varphi_{\mathbb{P}^n}(dl) = \binom{dl+n}{n} = \frac{(dl+n)\cdot\ldots\cdot(dl+1)}{n!}$ oraz $\deg(\rho_d(\mathbb{P}^n)) = d^n$.

(b) Zauważmy, że pierścień jednorodny zanurzenia Segre'a $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \hookrightarrow \mathbb{P}^{rs}$ to: $S(\psi(\mathbb{P}^n)) = k[\{z_{ij}\}]/\mathfrak{a}$ (oznaczenia z zadania 2.14). Przekształcenie $z_{ij} \mapsto x_i y_j$ indukuje zanurzenie $k[\{z_{ij}\}]/\mathfrak{a} \hookrightarrow k[x_1, \dots, y_1, \dots]$. Łatwo zauważyć, że obraz tego zanurzenia jest generowany (jako k-moduł) przez jednomiany postaci $x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r} \cdot y_1^{\beta_1} \dots y_s^{\beta_s}$, gdzie $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = \beta_1 + \ldots + \beta_s$. Stąd dostajemy izomorfizm modułów:

$$S(\psi(\mathbb{P}^n))_l \cong Span_k(\{x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r} \cdot y_1^{\beta_1} \dots y_s^{\beta_s} : \qquad \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = \beta_1 + \ldots + \beta_s = l\})$$

więc:

$$\varphi_{\psi(\mathbb{P}^n)}(l) = (\text{ilość jednomianów stopnia } l \text{ w } r \text{ zmiennych}) \cdot (\text{ilość jednomianów stopnia } l \text{ w } s \text{ zmiennych}) =$$

$$= \binom{l+r}{r} \cdot \binom{l+s}{s}$$

oraz $\deg \psi(\mathbb{P}^n) = \frac{(r+s)!}{r! \cdot s!} = \binom{r+s}{r}$.

1.7.2

(c) niech $H : f = 0$, $H \subset \mathbb{P}^n$. Wtedy $S(H) = k[x_0, \dots, x_n]/(f) = S(\mathbb{P}^n)/(f)$ oraz (tak jak na stronie 52):

$$\varphi_{S(H)}(l) = \varphi_{S(\mathbb{P}^n)}(l) - \varphi_{S(\mathbb{P}^n)}(l-d) = \binom{n+l}{n} - \binom{n+(l-d)}{n}$$

więc:

$$p_a(H) = (-1)^{n-1} \cdot \left(\binom{n}{n} - \frac{(n-d)\cdot(n-d-1)\cdot\ldots\cdot(n-d-(n-1))}{n!} - 1 \right) =$$

$$= \frac{(d-n)\cdot(d-n+1)\cdot\ldots\cdot(d-1)}{n!} = \binom{d-1}{n}$$

(d) niech $Y : f = g = 0$, $\deg f = a$, $\deg g = b$ (jednorodne). Niech $S(Y) = S(\mathbb{P}^n)/(f,g)$, $S_1 = S(\mathbb{P}^n)/(g)$. Wtedy (tak jak na stronie 52 – korzystamy z tego dwukrotnie):

$$\varphi_{S(Y)}(l) = \varphi_{S_1}(l) - \varphi_{S_1}(l-a) = \left(\varphi_{S(\mathbb{P}^n)}(l) - \varphi_{S(\mathbb{P}^n)}(l-b)\right) -$$

$$- \left(\varphi_{S(\mathbb{P}^n)}(l-a) - \varphi_{S(\mathbb{P}^n)}(l-a-b) - 1\right) =$$

$$= \binom{l+n}{n} - \binom{(l-a)+n}{n} - \binom{(l-b)+n}{n} + \binom{(l+a+b)+n}{n}$$

co daje:

$$p_a(Y) = (-1)^3 \left(\binom{3}{3} - \frac{(3-a)\cdot(3-a-1)\cdot\ldots\cdot(3-a-(3-1))}{3!} - \frac{(3-b)\cdot(3-b-1)\cdot\ldots\cdot(3-b-(3-1))}{3!} + \right.$$

$$\left. \frac{(3-a-b)\cdot(3-a-b-1)\cdot\ldots\cdot(3-a-b-(3-1))}{3!} - 1 \right) = \frac{1}{2}ab(a+b-4)+1$$

(e)

1.7.6

($\Leftarrow$) Jeżeli Y jest rozmaitością liniową, to po liniowej zamianie zmiennych można bez straty ogólności założyć, że $Y = \{(x_0 : \ldots : x_r : 0 : \ldots : 0) | x_i \in k\}$, więc $\deg Y = 1$.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że Y jest zbiorem algebraicznym czystego wymiaru r w $\mathbb{P}^n$. Z Proposition I.7.6 (b) stwierdzamy, że Y ma tylko jedną składową nierozkładalności, jest więc rozmaitością. Tezę wykażemy indukcyjnie wg r:

- $r = 1$: niech H będzie dowolną hiperpłaszczyzną przechodzącą przez 2 punkty należące do Y. Wtedy z Theorem I.7.7 stwierdzamy, że $Y \subset H$ (w przeciwnym wypadku $Y \cap H$ miałoby tylko jedną składową). Po liniowej zamianie zmiennych: $Y \subset \mathbb{P}^{n-1}$. Powtarzając rozumowanie i obniżając n, dojdziemy do momentu, gdy $Y \subset \mathbb{P}^1$, co daje $Y = \mathbb{P}^1$.
- **krok indukcyjny:** podobnie jak w pierwszym kroku, wystarczy wykazać, że istnieje hiperpłaszczyzna H, zawierająca Y. Wybierzmy dowolną hiperpłaszczyznę H_1 – jeżeli $Y \not\subset H_1$, to z Theorem I.7.7 $L := Y \cap H_1$ ma jedną składową i jest ona stopnia 1 oraz wymiaru $r-1$. Wtedy z założenia indukcyjnego L jest rozmaitością liniową. Niech H będzie dowolną hiperpłaszczyzną przechodzącą przez L oraz dowolny punkt zbioru $Y \backslash L$. Wtedy $Y \cap H$ ma co najmniej dwie składowe, więc z Theorem I.7.7 musimy mieć: $Y \subset H$. To kończy dowód.

1.7.7

(a) X jest obrazem morfizmu $f : Y \times k \to X$, $f(Q,t) = tQ + (1-t)P$, więc $\dim X \leqslant \dim(Y \times k) = r + 1$. Z drugiej strony, $Y \subsetneq X$ (jeżeli $X = Y$, to prosta przechodząca przez dowolne dwa punkty Y jest zawarta w Y, więc Y jest liniowa i $d = 1$ – sprzeczność), więc $\dim Y < \dim X$. Stąd $\dim X = r + 1$.

(b) wzmocnimy tezę – fakt ten zachodzi dla dowolnego zbioru algebraicznego Y wymiaru $r \geqslant 0$. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie wg r. Jeżeli $r = 0$, to Y jest zbiorem d punktów, zaś X – zbiorem $d-1$ prostych. Stąd (z Proposition I.7.6 (b)) $\deg X = d - 1 < \deg Y$.
Krok indukcyjny: wybierając przechodzącą przez P hiperpłaszczyznę H „w ogólnej pozycji" możemy założyć, że wszystkie składowe $X \cap H$ mają krotność przecięcia z H równą 1. Wtedy (z Proposition I.7.6 (b) oraz Theorem I.7.7) $\deg X = \deg(X \cap H)$ i z założenia indukcyjnego $\deg(X \cap H) < \deg(Y \cap H)$. Wystarczy teraz zauważyć, że z Theorem I.7.7: $\deg(Y \cap H) \leqslant \deg Y$.

1.7.8 Niech $P \in Y$ będzie dowolnym nieosobliwym punktem i niech X będzie stożkiem Y „zgniecionym" w punkcie P, tak jak w zadaniu I.7.7. Wtedy $\dim X = r + 1$, $\deg X < \deg Y = 2$, więc $\deg X = 1$. Stąd, z zadania 7.6, X jest rozmaitością liniową wymiaru $r + 1$, co dowodzi tezy.

2. Schemes

Podrozdział 2.1

2.1.2

(a) przypomnijmy, że φ_P jest zdefiniowane jako: $\varphi_P([(U,s)]_\sim) = [(U,\varphi(U)(s))]_\sim$. Rozpisując definicje i pamiętając, że $U \mapsto \ker\varphi(U)$ jest snopem (nie jest potrzebne usnopowianie – fakt wspomniany w tekście):

$$(\ker\varphi)_P = \lim_{U\ni P}(\ker\varphi)(U) = \{(U,s) : s\in\mathcal{F}(U), \qquad P\in U, \quad \varphi(U)(s)=0\}\Big/\sim$$

$$\ker(\varphi_P) = \{[(U,s)]_\sim \in \mathcal{F}_P : \varphi_P([(U,s)]_\sim)=0\} = \{(U,s) : s\in\mathcal{F}(U), \quad P\in U, \quad \varphi(U)(s)=0\}\Big/\sim$$

(gdzie $\sim$ oznacza wszędzie oczywiste relacje równoważności). To dowodzi równości $(\ker\varphi)_P = \ker(\varphi_P)$. Analogicznie (korzystając z faktu, że presnop i snop mają te same źdźbła – dla presnopa $U\mapsto \mathrm{im}(\varphi(U))$ oraz snopa $im\varphi$):

$$(\mathrm{im}\,\varphi)_P = \lim_{U\ni P}(\mathrm{im}\,\varphi)(U) = \{(U,\varphi(s)) : s\in\mathcal{F}(U), \quad P\in U\}\Big/\sim$$

$$\mathrm{im}(\varphi_P) = \{\varphi_P([(U,s)]_\sim) : [(U,s)]_\sim\in\mathcal{F}_P\} = \{[(U,\varphi_P(s))]_\sim) : P\in U, \quad s\in\mathcal{F}(U)\}$$

co dowodzi drugiej równości.

(b) φ jest iniekcją (odpowiednio: surjekcją) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ naturalne odwzorowanie $0\to\ker\varphi$ (odpowiednio: $\mathrm{im}\,\varphi\to\mathcal{G}$) jest izomorfizmem $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (Proposition II.1.1) $\forall_P$ naturalne odwzorowanie $0\to(\ker\varphi)_P = \ker(\varphi_P)$
(odpowiednio: $(im\varphi)_P = \mathrm{im}(\varphi_P)\to\mathcal{G}_P$) jest izomorfizmem $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\forall_P$ φ_P jest iniekcją (odpowiednio: surjekcją).

(c) jeżeli ciąg snopów jest dokładny, to $im\varphi^i = \ker\varphi^{i+1}$, więc $im(\varphi^i_P) = \mathrm{im}(\varphi^i)_P = \ker(\varphi^{i+1})_P = \ker(\varphi^{i+1}_P)$ czyli ciąg źdźbeł w każdym punkcie jest dokładny.
Na odwrót: załóżmy, że ciąg źdźbeł w każdym punkcie jest dokładny. Wtedy:

$$\forall_P \qquad (\varphi^i\circ\varphi^{i-1})_P = \varphi^i_P\circ\varphi^{i-1}_P = 0$$

Lemat Jeżeli $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ jest morfizmem snopów grup abelowych takim, że $f_P=0$ dla każdego P, to $f=0$.
Dowód: z założenia inkluzja $\ker f\subset\mathcal{F}$ jest izomorfizmem na źdźble dowolnego punktu P, więc teza wynika z Proposition II.1.1.

Z lematu wynika, że $\varphi^i\circ\varphi^{i-1}=0$ oraz $im(\varphi^{i-1})\subset\ker(\varphi^i)$. Z dokładności ciągów źdźbeł stwierdzamy, że inkluzja $im(\varphi^{i-1})\subset\ker(\varphi^i)$ jest izomorfizmem na dowolnym źdźble, więc z Proposition II.1.1: $im(\varphi^{i-1}) = \ker(\varphi^i)$, co dowodzi dokładności ciągu snopów.

2.1.4

(a) wykażę najpierw, że $\varphi_P:\mathcal{F}_P\to\mathcal{G}_P$ jest iniektywne. Załóżmy, że $\varphi_P([U,s]) = \varphi_P([U',s'])$, tzn. $[U,\varphi(s)] = [U',\varphi(s')]$ – wtedy dla pewnego $V\subset U\cap U'$: $\varphi(s)|_V = \varphi(s')|_V$, czyli $\varphi(s|_V) = \varphi(s'|_V)$, więc $s|_V = s'|_V$ oraz $[U,s]=[U',s']$.
Wystarczy teraz zauważyć, że $\varphi^+(U)$ jest obięciem odwzorowania produktowego $\prod_{P\in U}\varphi_P$ do podzbioru $\mathcal{F}^+(U)$ produktu $\prod_{P\in U}\mathcal{F}_P$, zaś produkt odwzorowań różnowartościowych jest różnowartościowy.

(b) rozważmy presnop $im^P\varphi$ dany przez: $U\mapsto im\,\varphi(\mathcal{F}(U))$ – jest on w naturalny sposób podsnopem $\mathcal{G}$. Jeżeli $i: im^P\varphi\to\mathcal{G}$ jest inkluzją, to $i^+: im\,\varphi\to\mathcal{G}$ jest iniekcją, więc $im\,\varphi$ można utożsamiać z podsnopem $\mathcal{G}$.

2.1.8 Skorzystamy z faktu wspomnianego w tekście: $U\mapsto\ker(\mathcal{F}'(U)\to\mathcal{F}(U))$ jest snopem $\ker(\mathcal{F}'\to\mathcal{F})$ (nie jest potrzebne usnopowianie).

Niech $0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}''$. Wtedy $\ker(\mathcal{F}'(U)\to\mathcal{F}(U)) = \ker(\mathcal{F}'\to\mathcal{F})(U) = 0$, więc dla każdego U: $\mathcal{F}'(U)\hookrightarrow\mathcal{F}(U)$ i możemy bez straty ogólności założyć, że $\mathcal{F}'$ jest podsnopem $\mathcal{F}$. Wtedy z dokładności: $\mathcal{F}' = \ker(\mathcal{F}\to\mathcal{F}'')$. Stąd: $im(\mathcal{F}'(U)\to\mathcal{F}(U)) = \mathcal{F}'(U) = \ker(\mathcal{F}\to\mathcal{F}'')(U) = \ker(\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}''(U))$. To dowodzi lewodokładności.

2.1.12 Niech $U = \bigcup_i U_i$.

Własność przedłużania: załóżmy, że $(S_i) \in \prod_i \varprojlim_k \mathcal{F}_k(U_i)$ (gdzie $S_i = (s_{ik})_k \in \varprojlim_k \mathcal{F}_k(U_i)$) spełnia warunek zgodności: $\forall_{i,j} \quad S_i|_{U_i \cap U_j} = S_j|_{U_i \cap U_j}$. Wtedy musimy mieć: $\forall_{i,j,k} \quad s_{ik}|_{U_i \cap U_j} = s_{jk}|_{U_i \cap U_j}$, więc z własności przedłużania dla snopa $\mathcal{F}_k$ stwierdzamy, że istnieje dokładnie jedno $s_k \in \mathcal{F}_k(U)$ takie, że $s_k|_{U_i} = s_{ik}$. Niech $S = (s_k)_k \in \prod_k \mathcal{F}_k(U)$; wystarczy sprawdzić, że $S \in \varprojlim_k \mathcal{F}_k(U)$, tzn. że $\varphi_{kl}(U)(s_l) = s_k$ (gdzie $\varphi_{kl} : \mathcal{F}_l \to \mathcal{F}_k$ – morfizmy systemu odwrotnego). Istotnie:

$$\varphi_{kl}(U)(s_l)|_{U_i} = \varphi_{kl}(U_i)(s_l|_{U_i}) = \varphi_{kl}(U_i)(s_{il}) = \varphi_{kl}(U_i)(s_{il}) = s_{ik} = s_k|_{U_i}$$

więc z własności jednoznaczności: $\varphi_{kl}(U)(s_l) = s_k$.

Jednoznaczność: załóżmy, że $S = (s_k)_k, T = (t_k)_k \in \varprojlim_k \mathcal{F}_k(U)$ oraz $S|_{U_i} = T|_{U_i}$ dla każdego i. Wtedy $\forall_{i,k} \quad s_k|_{U_i} = t_k|_{U_i}$, więc z własności jednoznaczności dla snopów $\mathcal{F}_k$ dostajemy: $\forall_k \quad s_k = t_k$, czyli $S = T$.

Własność uniwersalności: załóżmy, że $\mathcal{G}$ jest snopem oraz że $(\psi_k : \mathcal{G} \to \mathcal{F}_k)_k$ komutują z morfizmami systemu odwrotnego. Wtedy dla każdego U, z własności uniwersalności dla granicy odwrotnej zbiorów/grup abelowych, dla każdego istnieje dokładnie jeden morfizm $\Psi(U) : \mathcal{G}(U) \to \varprojlim_k \mathcal{F}_k(U)$ spełniający: $\forall_k \quad \psi_k(U) = \pi_k(U) \circ \Psi(U) \quad (*)$ (gdzie $\pi_k : \varprojlim_k \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_k$ jest naturalną projekcją). Pozostaje sprawdzić, że rodzina $\Psi = (\Psi(U))_U$ tworzy morfizm snopów, tzn. że $\rho_{UV} \circ \Psi(U) = \Psi(V) \circ \rho_{UV}$ (uwaga: dla uproszczenia będę oznaczał restrykcje przez ρ_{UV}, nie zaznaczając do jakiego snopa należą). Zauważmy, że dla każdego k:

$$\pi_k(V) \circ \rho_{UV} \circ \Psi(U) = \rho_{UV} \circ (\pi_k(U) \circ \Psi(U)) = \rho_{UV} \circ \psi_k(U) = \psi_k(V) \circ \rho_{UV} = \pi_k(V) \circ \Psi(V) \circ \rho_{UV}$$

Ale jeżeli $\forall_k \quad \pi_k(V)(x) = \pi_k(V)(y)$, to $x = y$, co dowodzi że $\rho_{UV} \circ \Psi(U) = \Psi(V) \circ \rho_{UV}$.

2.1.13 Kilka początkowych spostrzeżeń:

(1) $f : X \to Y$ jest ciągłe w punkcie $P \in X$ wtw. gdy dla każdego otoczenia U punktu $f(P)$ istnieje otoczenie V punktu P takie, że $f(V) \subset U$,

(2) dla dowolnego $t \in \mathcal{F}(V)$ zbiór $\bar{t}(V)$ jest otwarty – istotnie, jeżeli $s \in \mathcal{F}(U)$, to

$$\bar{s}^{-1}(\bar{t}(V)) = \{P \in U : \bar{s}(P) \in \bar{t}(V)\} = (s, t \text{ są cięciami}) = \{P \in V : s_P = t_P\} = X \backslash Supp(s|_V - t)$$

zaś zbiór $Supp(s|_V - t)$ jest domknięty na mocy zadania 14. Stąd $\bar{t}(V)$ jest otwarty na mocy definicji topologii finalnej.

Chcemy pokazać, że cięcie $c : U \to Spe(\mathcal{F})$ jest ciągłe wtw. gdy jest lokalnie dane przez kiełki cięć – tak jak odwzorowania w definicji $\mathcal{F}^+$.
Załóżmy, że cięcie $c : U \to Spe(\mathcal{F})$ jest ciągłe i niech $P \in U$. Wtedy c jest cięciem, więc $c(P) = [(V, t)]$ dla pewnego $(V, t) \in \mathcal{F}_P$. Stąd, z uwagi (1) dla zbioru otwartego $\bar{t}(V)$, stwierdzamy, że istnieje zbiór otwarty $W \ni P$ taki, że $c(W) \subset \bar{t}(V)$. Ale $c, \bar{t}$ są cięciami π, więc $c|_W = \bar{t}|_W$ (jeżeli $Q \neq Q'$, to $\mathcal{F}_Q \cap \mathcal{F}_{Q'} = \varnothing$, czyli jeżeli byłoby $c(Q) \neq t(Q)$, to $c(Q) \notin \bar{t}(V)$), czyli $\forall_{Q \in W} \quad c(Q) = t_Q$ – jest to definicja elementu usnopowienia.

Na odwrót – załóżmy, że dla każdego $P \in U$ istnieje otoczenie W oraz $t \in \mathcal{F}(W)$ takie, że $\forall_{Q \in W} \quad c(Q) = t_Q$. Oznacza to, że $c|_W = \bar{t}$. Ale $\bar{t}$ jest (z definicji topologii na $Spe(\mathcal{F})$) ciągłe na W, więc $c|_W$ jest ciągłe.

2.1.14 Jeżeli $P \in U \backslash Supp(s)$, to $[(U, s)] = 0$ w $\mathcal{F}_P$, tzn. istnieje otoczenie $W \subset U$ punktu P takie, że $s|_W = 0$. Wtedy dla dowolnego $Q \in W$ mamy: $s_Q = 0$, więc $W \subset U \backslash Supp(s)$ – dowodzi to otwartości $U \backslash Supp(s)$.

2.1.16

(a) zauważmy, że każdy otwarty podzbiór U przestrzeni nierozkładalnej X jest spójny. Istotnie, jeżeli byłoby $U = U_1 \sqcup U_2$, to U_1, U_2 byłyby dwoma rozłącznymi podzbiorami otwartymi przestrzeni nierozkładalnej, więc jeden z nich musiałby być pusty.
Stąd, z przykładu II.1.0.3 dla każdego $U \subset X$: $A(U) = A$ i restrykcje są izomorfizmami.

(b) niech $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ będzie surjekcją i załóżmy, że $\ker\varphi \cong \mathcal{F}'$ jest wiotkim snopem. Niech $s \in \mathcal{F}''(U)$ – wtedy (zadanie II.1.3 (a)) z surjektywności φ każdy punkt ma otoczenie, w którym s jest obrazem cięcia z $\mathcal{F}$.

Rozważmy rodzinę $\mathcal{R} = \{(V,t) : V \subset U - \text{otwarty}, t \in \mathcal{F}(V), \varphi_V(t) = s|_V\}$, uporządkowaną przez relację: $(V,t) \prec (V',t') \Leftrightarrow \quad V \subset V', \quad t'|_V = t$. Zauważmy, że rodzina ta musi mieć element maksymalny (V_0, t_0) – istotnie, każdy łańcuch $(V_i, t_i)_i$ ma ograniczenie górne $(\bigcup_i V_i, t)$, gdzie $t \in \mathcal{F}(\bigcup_i V_i)$ jest jedynym elementem spełniającym $t|_{V_i} = t_i$ (jego istnienie wynika z własności przedłużania na snopie), więc wynika to z lematu Kuratowskiego-Zorna.

Wykażemy, że $V_0 = X$, co dowiedzie tezy. Załóżmy nie wprost, że $V_0 \neq X$ – wtedy z surjektywności φ istnieje zbiór $V_1 \not\subset V_0$ oraz $t_1 \in \mathcal{F}(V_1)$ takie, że $\varphi_{V_1}(t_1) = s|_{V_1}$. Wtedy:

$$\varphi_{V_0 \cap V_1}(t_0|_{V_0 \cap V_1}) = s|_{V_0 \cap V_1} = \varphi_{V_0 \cap V_1}(t_1|_{V_0 \cap V_1})$$

więc $k := t_0|_{V_0 \cap V_1} - t_1|_{V_0 \cap V_1} \in \ker(\varphi(V_0 \cap V_1))$. Z wiotkości istnieje element $K \in \mathcal{F}(V_1)$ taki, że $K|_{V_0 \cap V_1} = k$. Zauważmy, że $t_0|_{V_0 \cap V_1} = t_1|_{V_0 \cap V_1} + K|_{V_0 \cap V_1}$, więc oznaczając $V_2 := V_0 \cup V_1$ możemy wybrać $t_2 \in \mathcal{F}(V_2)$ takie, że $t_2|_{V_0} = t_0$, $t_2|_{V_1} = t_1 + K$. Wtedy $(V_0, t_0) \prec (V_2, t_2)$ – istotnie,

$$\varphi_{V_2}(t_2)|_{V_0} = \varphi_{V_0}(t_2|_{V_0}) = \varphi_{V_0}(t_0) = s|_{V_0}$$

$$\varphi_{V_2}(t_2)|_{V_1} = \varphi_{V_1}(t_2|_{V_1}) = \varphi_{V_0}(t_1 + k) = s|_{V_1}$$

więc $\varphi_{V_2}(t_2) = s|_{V_2}$ z jednoznaczności oraz $(V_2, t_2) \in \mathcal{R}$. Sprzeczność z założeniem o maksymalności (V_0, t_0) kończy dowód.

(c) niech $V \subset U$. Z wiotkości $\mathcal{F}'$ i z poprzedniego podpunktu, wiersze w diagramie przemiennym:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

są dokładne. Ponadto, z powyższego diagramu i z wiotkości $\mathcal{F}$ wynika, że $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U) \to \mathcal{F}''(V)$ jest równe złożeniu surjekcji $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}''(V)$, jest więc surjekcją. Ale jeżeli złożenie funkcji jest surjekcją, to zewnętrzna z nich jest surjekcją, więc $\mathcal{F}''(U) \to \mathcal{F}''(V)$ jest "na", co dowodzi wiotkości $\mathcal{F}''$.

(d) załóżmy, że $V \subset U \subset Y$ – wtedy $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$ są zbiorami otwartymi oraz z wiotkości $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$, czyli $(f_*\mathcal{F})(U) \twoheadrightarrow (f_*\mathcal{F})(V)$.

(e) mamy: $\mathcal{G}(U) = \prod_{P \in U} \mathcal{F}_P$, a ponadto dla $V \subset U$, restrykcja $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$ jest rzutowaniem $\prod_{P \in U} \mathcal{F}_P \to \prod_{P \in V} \mathcal{F}_P$ (pomijamy współrzędne pochodzące od punktów z $U \backslash V$) – jest ona więc "na" ($(s_P)_{P \in V}$ jest obrazem $(s_P)_{P \in V} \cup (0)_{P \in U \backslash V}$).

Aby wykazać, że odwzorowanie snopów zadane przez:

$$\mathcal{F}(U) \ni \quad s \mapsto ([U,s])_P \quad \in \prod_{P \in U} \mathcal{F}_P = \mathcal{G}(U)$$

jest iniekcją, wystarczy pokazać, że jest ono iniekcją na cięciach.

Załóżmy, że $\forall_{P \in U} \quad [U,s] = 0$ w $\mathcal{F}_P$, tzn. że dla każdego $P \in U$ istnieje $V_P \ni P$ takie, że $s|_{V_P} = 0$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $V_P \subset U$ (zamieniając ewentualnie V_P na $V_P \cap U$). Wtedy z własności jednoznaczności snopa, $(0_P) \in \prod_{P \in U} \mathcal{F}(V_P)$ ma jednoznaczne podniesienie do $\mathcal{F}(\bigcup_{P \in U} V_P) = \mathcal{F}(U)$. Z jednej strony, jest to s, z drugiej – element zerowy, więc $s = 0$.

2.1.17 Załóżmy, że $Q \neq \overline{\{P\}}$ i niech $S = X \backslash \overline{\{P\}}$ – wtedy S jest zbiorem otwartym. Z definicji: $(i_P(A))_Q = \lim_{U \ni Q} i_P(A)(U)$. Ale dla każdego zbioru U istnieje przkształcenie zerowe w systemie prostym: $i_P(A)(U) \to i_P(A)(U \cap S) = 0$, więc $(i_P(A))_Q = 0$.

Niech $Q \in \overline{\{P\}}$. Zauważmy, że jeżeli $Q \in U$ dla pewnego zbioru otwartego U, to $P \in U$. Istotnie, jeżeli $P \in X \backslash U$, to $\overline{\{P\}} \subset \overline{X \backslash U} = X \backslash U$. Stąd: $(i_P(A))_Q = \lim_{U \ni Q} i_P(A)(U) = \lim_{U \ni Q} A = A$.

Ponadto $\overline{\{P\}}$ jest zawsze zbiorem spójnym, więc

$$i_*(A)(U) = A(i^{-1}(U)) = A(U \cap \overline{\{P\}}) = \begin{cases} A & P \in U \\ 0 & P \notin U \end{cases} = i_P(A)(U)$$

2.1.19

(a) mamy: $(i_*\mathcal{F})_P = \lim_{V\ni P}\mathcal{F}(i^{-1}(V)) = \lim_{V\ni P}\mathcal{F}(V\cap Z)$.

- jeżeli $P\in Z$, to wszystkie otoczenia otwarte P w Z są właśnie postaci $V\cap Z$, więc $(i_*\mathcal{F})_P = \lim_{V\ni P}\mathcal{F}(V\cap Z) = \mathcal{F}_P$,
- jeżeli $P\notin Z$, to $P\in U$, więc dla każdego otwartego $V\ni P$ w systemie prostym powyższej granicy mamy przekształcenie zerowe: $\mathcal{F}(V\cap Z)\to\mathcal{F}(V\cap U\cap Z) = \mathcal{F}(\varnothing) = 0$ oraz $(i_*\mathcal{F})_P = 0$.

(b) korzystając z tego, że źdźbła usnopowienia są izomorficzne ze źdźbłami presnopa:

- jeżeli $P\notin U$, to dla dowolnego $V\ni P$ mamy: $V\not\subset U$, więc $\mathcal{F}(V) = 0$. Stąd: $(j_!(\mathcal{F}))_P = \lim_{V\ni P} 0 = 0$,
- jeżeli $P\in U$, to dla dowolnego $V\ni P$ mamy naturalne przekształcenie w systemie prostym definiującym granicę prostą: $j_!(\mathcal{F}(V))\to j_!(\mathcal{F}(V\cap U)) = \mathcal{F}(V\cap U)$ – oznacza to, że granice proste $\lim_{V\ni P} j_!\mathcal{F}(V)$ oraz $\lim_{V\ni P, V\subset U}\ \ j_!\mathcal{F}(V)$ można utożsamić, więc $(j_!(\mathcal{F}))_P = \lim_{V\ni P,V\subset U}\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_P$.

(c) wszystkie przekształcenia są dane w oczywisty sposób. Z Proposition II.1.1 dokładność wystarczy sprawdzać na źdźbłach, zaś to jest oczywiste:

- jeżeli $P\in Z$, to $(i_*\mathcal{F})_P = \mathcal{F}_P$ oraz $(j_!(\mathcal{F}))_P = 0$, więc ciąg źdźbeł $0\to\mathcal{F}_P\to\mathcal{F}_P\to 0\to 0$ jest dokładny,
- jeżeli $P\notin Z$, tzn. $P\in U$, to $(i_*\mathcal{F})_P = 0$ oraz $(j_!(\mathcal{F}))_P = \mathcal{F}_P$, więc ciąg źdźbeł $0\to 0\to\mathcal{F}_P\to\mathcal{F}_P\to 0$ jest dokładny.

2.1.21

(a) **Własność jednoznaczności:** załóżmy, że $f\in\mathcal{I}_Y(U)$, $U = \bigcup_i U_i$, $\forall_i\quad f|_{U_i} = 0$. Wtedy $f = 0$ na mocy lematu I.4.1.

Własność przedłużania: załóżmy, że $f_i\in\mathcal{I}_Y(U_i)$ jest "zgodną" rodziną, gdzie $U = \bigcup_i U_i$. Zdefiniujmy: $f(x) = f_i(x)$ dla $x\in U_i$ – ze zgodności wynika, że wartość ta nie zależy od wyboru i oraz że f jest ciągła. Ponadto regularność jest własnością lokalną, więc $f\in\mathcal{O}_X(U)$. Oczywiste jest też, że $f|_{Y\cap U} = 0$.

(b) rozważmy naturalne przekształcenie $\varphi:\mathcal{O}_X\to i_*(\mathcal{O}_Y)$. Z samej definicji mamy: $\ker(\varphi(U)) = \mathcal{I}_Y(U)$ – wystarczy więc pokazać, że przekształcenie to jest surjekcją. Niech $f\in i_*(\mathcal{O}_Y)(U) = \mathcal{O}_Y(Y\cap U)$, z zadania II.1.3(a) chcemy pokazać, że f jest "lokalnie" obrazem cięć z $\mathcal{O}_X(U)$. Niech $P\in U$ – wtedy jeżeli $P\notin Y$, to dla $W := U\cap(X\backslash Y)$ mamy: $f|_W = 0 = \varphi(W)(0)$. Załóżmy teraz, że $P\in Y$. Funkcja f jest regularna w P; jest więc dana w jego otoczeniu (w Y) przez pewną funkcję wymierną g/h. Ta funkcja wymierna, traktowana jako funkcja na X, jest określona na otwartym podzbiorze $W = D(h)\subset X$, więc $f = \varphi(W)(g/h)$. To dowodzi surjektywności.

(c) aby wykazać dokładność danego ciągu snopów, wystarczy pokazać (na mocy poprzedniego podpunktu), że $i_*\mathcal{O}_P\oplus i_*\mathcal{O}_Q\cong i_*(\mathcal{O}_Y)$. Mamy:

$$i_*(\mathcal{O}_Y)(U) = \mathcal{O}_Y(Y\cap U) = \begin{cases} O_Y(\{P\}), & P\in U, Q\notin U\\ O_Y(\{Q\}), & Q\in U, P\notin U\\ O_Y(\{P,Q\}) = O_Y(\{P\})\oplus O_Y(\{Q\}), & P\in U, Q\in U\\ 0, & P,Q\notin U\end{cases} = (i_*\mathcal{O}_P\oplus i_*\mathcal{O}_Q)(U)$$

Na globalnych cięciach mamy jednak: $\mathcal{O}_X(X) = k$ ("zasada maksimum" – Theorem I.3.4 (a)), $\mathcal{I}_Y(X) = \{f\in O_X(X) : f(P) = f(Q) = 0\} = \{f\in k : f(P) = f(Q) = 0\} = 0$, $i_*(\mathcal{O}_P)(X)\oplus i_*(\mathcal{O}_Q)(X) = k\oplus k$, zaś ciąg:

$$0\to 0\to k\to k\oplus k\to 0$$

nie jest dokładny (odwzorowanie $k\mapsto k\oplus k$ nie jest "na").

(d) naturalne odwzorowanie $\mathcal{K}\to\sum_{P\in X} i_P(K/\mathcal{O}_P)$ indukuje odwzorowanie $\mathcal{K}/\mathcal{O}\to\sum_{P\in X} i_P(K/\mathcal{O}_P)$. Wystarczy sprawdzić, że jest ono izomorfizmem na kiełkach. Niech $Q\in X$ będzie punktem domkniętym – wtedy $(\mathcal{K}/\mathcal{O})_Q\cong K/\mathcal{O}_Q$ oraz $\sum_{P\in X}(i_P(K/\mathcal{O}_P))_Q = 0+0+\ldots+K/\mathcal{O}_Q+\ldots+0$ i jak łatwo sprawdzić, indukowane odwzorowanie na kiełkach jest identycznością. Biorąc kiełki w punkcie generycznym, uzyskujemy zero po obu stronach.

(e) mamy:

$$\mathcal{O}_X(X) = k, \qquad \mathcal{K}(X) = K(\mathbb{P}^1) = K(\mathbb{A}^1) = k(x), \qquad (\mathcal{K}/\mathcal{O})(X) = \sum_{P\in X} i_P(K/\mathcal{O}_P)(X) = \sum_{P\in X} k(x)/k[x]_{\mathfrak{m}_P}$$

Aby sprawdzić dokładność w środku, zauważmy, że

$$\ker(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) \to \sum_{P\in\mathbb{P}^1} K(\mathbb{P}^1)/\mathcal{O}_P) = \bigcap_{P\in\mathbb{P}^1} \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = k$$

Pozostaje sprawdzić surjektywność ostatniego odwzorowania. Zauważmy najpierw, że dla każdy element $K(\mathbb{P}^1)/\mathcal{O}_P$ ma reprezentanta regularnego we wszystkich punktach poza P. Istotnie, dla $P = [a:1]$, jeżeli $h(x) \in k(x)$, to z rozkładu na ułamki proste stwierdzamy, że dla pewnego $f(x) \in k[x]$, $\deg f < n$:

$$h(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^n} + (\text{funkcja regularna w punkcie } P) \equiv \frac{f(x)}{(x-a)^n} \pmod{\mathcal{O}_P}$$

zaś jedynym biegunem $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ jest a. Analogicznie każdy element $K(\mathbb{P}^1)/\mathcal{O}_{[1:0]}$ ma reprezentanta postaci $f(x) \in k[x]$.

Niech więc $(f_P)_P \in \sum_{P\in X} k(x)/k[x]_{\mathfrak{m}_P}$, gdzie $f_P(x) \in k(x)$ są regularne poza punktem P oraz dla prawie wszystkich P: $f_P(x) = 0$. Niech $f = \sum_{P\in X} f_P$ – wtedy $f \equiv f_P \pmod{k[x]_{\mathfrak{m}_P}}$, więc obrazem f w $\sum_{P\in X} k(x)/k[x]_{\mathfrak{m}_P}$ jest $(f_P)_P$, co dowodzi surjektywności.

Podrozdział 2.2

2.2.3

(a) Niech $(X, \mathcal{O}_X)$ będzie zredukowany i załóżmy, że $[(U,f)]^n = 0$ w pierścieniu $\mathcal{O}_{X,x}$ – wtedy z definicji $f^n = 0$ w $\mathcal{O}_X(V)$ dla pewnego $V \subset U$, więc ze zredukowaności: $f = 0$, czyli $0 = [(V,f)] = [(U,f)]$ w $\mathcal{O}_{X,x}$.
Na odwrót: załóżmy, że $\mathcal{O}_{X,x}$ nie ma elemetów nilpotentnych dla każdego $x \in X$. Niech $f^n = 0$ w pierścieniu $\mathcal{O}_X(U)$. Wtedy dla dowolnego $x \in U$: $[(U,f)]^n = 0$ w $\mathcal{O}_{X,x}$, więc z założenia: $[(U,f)] = 0$, czyli z definicji pierścienia źdźbeł: $f|_{V_x} = 0$ dla pewnego otwartego zbioru V_x, spełniającego $x \in V_x \subset U$. Stąd obraz f w odwzorowaniu $\mathcal{O}_X(U) \to \prod_{x\in U} \mathcal{O}_X(V_x)$ jest zerowy, więc z własności jednoznaczności snopa: $f = 0$ w $\mathcal{O}_X(U)$.

(b) wykorzystamy następujące lematy:

Lemat 1 jeżeli A – pierścień bez elementów nilpotentnych, to każde odwzorowanie $f : B \to A$ faktoryzuje się przez odwzorowanie $f_{red} : B_{red} \to A$ i przyporządkowanie $f \mapsto f_{red}$ jest funktorialne.
Dowód: Istotnie, jeżeli $b \in Nil(B)$, $b^n = 0$ to $f(b)^n = 0$, więc $f(b) = 0$, czyli $Nil(B) \subset \ker f$, co pozwala na zdefiniowanie f_{red}. Funktorialność jest oczywista z jednoznaczności.

Lemat 2 Dla dowolnego zbioru multyplikatywnego $S \subset A$ mamy: $(S^{-1}A)_{red} = S^{-1}(A_{red})$.
Dowód: Surjekcja $A \to A_{red}$ indukuje surjekcję $S^{-1}A \to S^{-1}(A_{red})$. Zauważmy, że pierścień $S^{-1}(A_{red})$ jest zredukowany – istotnie, jeżeli $(\overline{a}/s)^n = 0$ w $S^{-1}(A_{red})$, to $\overline{a}^n \cdot s' = 0$ dla pewnego $s' \in S$, więc $(\overline{a} \cdot s')^n = 0$, czyli (ponieważ A_{red} jest zredukowany) $\overline{a} \cdot s' = 0$, co daje z definicji $\overline{a}/s = 0$ w $S^{-1}(A_{red})$.
Stąd surjekcja $S^{-1}A \to S^{-1}(A_{red})$ faktoryzuje się przez $(S^{-1}A)_{red} \to S^{-1}(A_{red})$. Pozostaje sprawdzić, że jest ona iniekcją. Jeżeli $[a/s] \in (S^{-1}A)_{red}$ ma zerowy obraz w $S^{-1}(A_{red})$, to $a \cdot s' \in Nil(A)$ dla pewnego $s' \in S$, więc $a^n \cdot s'^n = 0$, więc $(a/s)^n = 0$ w $S^{-1}A$ oraz $[a/s] = 0$ w $(S^{-1}A)_{red}$, co kończy dowód.

Wystarczy pokazać, że każdy punkt ma otoczenie afiniczne. Niech $U = \mathit{Spec}\, A$ będzie otoczeniem afinicznym punktu $x \in X$ w niezredukowanym schemacie X – wtedy dla $f \in A$: $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$. Niech $B = A_{red}$ – wtedy $U = \mathit{Spec}(B)$ (kanoniczne przekształcenie $A \to A_{red}$ indukuje homeomorfizm na schematach afinicznych – fakt z Atiyaha-MacDonalda). Aby pokazać, że $(\mathit{Spec}\, B, (\mathcal{O}_X)_{red}|_{\mathit{Spec}\, B})$ jest podschematem X_{red}, wystarczy pokazać, że $(\mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, A})_{red} = \mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, B}$. Oznaczmy przez $(\mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, A})_{Pred}$ presnop $U \mapsto \mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, A}(U)_{red}$. Zauważmy najpierw, że snop $\mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, B}$ jest zredukowany, ponieważ z **lematu 2** jego źdźbła: $B_{\mathfrak{p}}$ są zredukowane.

Zauważmy, że odwzorowanie kanoniczne $A \to B$ indukuje odwzorowanie schematów $\mathit{Spec}\, B \to \mathit{Spec}\, A$, które jest identycznością na przestrzeniach topologicznych, a więc dostajemy odwzorowanie snopów $\mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, A} \to \mathcal{O}_{\mathit{Spec}\, B}$.

Z lematu 1 stwierdzamy, że odwzorowania $\mathcal{O}_{Spec\,A}(U) \to \mathcal{O}_{Spec\,B}(U)$ faktoryzują się poprzez odwzorowania $\mathcal{O}_{Spec\,A}(U)_{red} \to \mathcal{O}_{Spec\,B}(U)$, dając tym samym morfizm presnopów $(\mathcal{O}_{Spec\,A})_{Pred} \to \mathcal{O}_{Spec\,B}$.

Z własności uniwersalności usnopowienia dostajemy morfizm snopów $(\mathcal{O}_{Spec\,A})_{red} \to \mathcal{O}_{Spec\,B}$ i pozostaje nam sprawdzić, że jest on izomorfizmem na kiełkach. Mamy (korzystając z **lematu 2**):

$$((\mathcal{O}_{Spec\,A})_{red})_{\mathfrak{p}} = ((\mathcal{O}_{Spec\,A})_{Pred})_{\mathfrak{p}} = \lim_{U \ni \mathfrak{p}} (\mathcal{O}_{Spec\,A})(U)_{red} =$$

$$= \lim_{D(f) \ni \mathfrak{p}} (\mathcal{O}_{Spec\,A})(D(f))_{red} = \lim_{D(f) \ni \mathfrak{p}} (A_f)_{red} = \lim_{D(f) \ni \mathfrak{p}} (A_{red})_{\overline{f}} = (A_{red})_{\overline{\mathfrak{p}}} = B_{\overline{\mathfrak{p}}}$$

oraz

$$(\mathcal{O}_{Spec\,B})_{\mathfrak{p}} = B_{\overline{\mathfrak{p}}}$$

i odwzorowanie na źdźbłach jest, jak łatwo sprawdzić, identycznością.
Z powyższego rozumowania widać, że źdźbła schematu X_{red} są zredukowane, więc schemat ten jest zredukowany.

Morfizm $X_{red} \to X$ dany jest przez $\pi = (id : sp(X_{red}) \to sp(X), \pi^{\#} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X_{red}})$, gdzie $\pi^{\#}(U) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)_{red} = (\mathcal{O}_X)_{Pred}(U) \to (\mathcal{O}_X)_{red}(U)$, gdzie pierwsze odwzorowanie jest ilorazowe, zaś drugie to morfizm presnopa w usnopowienie.

(c) Niech $(f, f^{\#}) : X \to Y$, zaś $\pi : X_{red} \to X$ będzie naturalnym odwzorowaniem (jest ono identycznością na przestrzeniach topologicznych). Zauważmy, że odwzorowanie $f^{\#}(U) : \mathcal{O}_Y(U) \to f_*\mathcal{O}_X(U)$ faktoryzuje się przez $(f^{\#}(U))_{red} : \mathcal{O}_Y(U)_{red} \to f_*\mathcal{O}_X(U)$ („własność uniwersalności" zredukowania – **Lemat 1** powyżej), a także przez $F^{\#}(U) : (\mathcal{O}_Y)_{red}(U) \to f_*\mathcal{O}_X(U)$ (własność uniwersalności usnopowienia dla presnopa $(\mathcal{O}_Y)_{Pred}$). Wtedy $f^{\#} = \pi^{\#} \circ F^{\#}$, więc $(f, F^{\#}) : X \to Y_{red}$ spełnia założenia.

2.2.5 Mamy: $Spec(\mathbb{Z}) = \{p\mathbb{Z} : p \in \mathbb{P}\} \cup \{0\}$ wraz z topologią daną zbiorami otwartymi $D(n) = \{p \in \mathbb{P} : p \nmid n\} \cup \{0\}$ (każdy zbiór otwarty jest tej postaci, jako że $\bigcup_i D(n_i) = D(NWD(n_i))$ oraz $D(n_1) \cap D(n_2) = D(n_1 n_2)$) oraz snopem strukturalnym $\mathcal{O}(D(n)) = \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$.
Ponadto dla dowolnego schematu X mamy: $Hom_{Sch}(X, Spec(\mathbb{Z})) = Hom(\mathbb{Z}, \mathcal{O}_X(X))$, ale dla dowolnego niezerowego pierścienia R istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\mathbb{Z} \to R$ (dany przez $f(n) = n \cdot 1_R$), co dowodzi, że $Spec(\mathbb{Z})$ jest obiektem końcowym.

2.2.7 Morfizm $Spec\,K \to X$ dany jest przez parę $(f : sp(Spec\,K) \to sp(X), \quad f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_{Spec\,K})$. Zauważmy, że $Spec\,K = \{\eta\}$ jest przestrzenią jednopunktową (gdzie η – ideał zerowy), więc f jest jednoznacznie wyznaczone przez $x := f(\eta)$. Ponadto:

$$f_*\mathcal{O}_{Spec\,K}(U) = \mathcal{O}_{Spec\,K}(f^{-1}(U)) = \begin{cases} 0, & x \notin U \\ K, & x \in U \end{cases} = i_x(K)$$

– jest to *skyscraper sheaf* na punkcie x. Korzystając z tego, że funktor źdźbła jest sprzężony do *skyscraper sheaf*:

$$Hom_{Sh}(\mathcal{O}_X, f_*\mathcal{O}_{Spec\,K}) = Hom_{Sh}(\mathcal{O}_X, i_x(K)) \cong Hom_{Ring}(\mathcal{O}_{X,x}, K)$$

Ponadto, aby $f^{\#}$ był lokalnym homomorfizmem: $f^{\#}_x(\mathfrak{m}_{X,x}) \subset \mathfrak{m}_{f_*\mathcal{O}_{Spec\,K},x} = 0$, zaś takie $f^{\#}$ odpowiadają jednoznacznie elementom $Hom_{Ring}(\mathcal{O}_{X,x}, K)$, które zerują się na $\mathfrak{m}_{X,x}$, czyli elementom $Hom_{Ring}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}, K) = Hom_{Ring}(\kappa(x), K)$.

2.2.8 Oznaczmy: $Y = Spec\,k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, zaś przez $j_X : X \to Spec\,k$, $j_Y : Y \to Spec\,k$ – odwzorowania zadające strukturę k-schematów. Wtedy: $j_X^{\#} : \mathcal{O}_{Spec\,k} \to (j_X)_*(\mathcal{O}_X)$, czyli $k \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$.
Morfizm $Y \to X$ dany jest przez parę $(f : sp(Y) \to sp(X), \quad f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y)$. Zauważmy, że $sp(Y) = \{\eta\}$, gdzie $\eta = (\varepsilon)$ jest jedynym ideałem pierwszym w $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Niech $x := f(\eta) \in sp(X)$. Podobnie jak w 2.7 (korzystając z tego, że *skyscraper sheaf* oraz źdźbło są sprzężone) stwierdzamy, że $f^{\#}$ jest jednoznacznie wyznaczone przez odwzorowanie na źdźbłach: $f^{\#} : \mathcal{O}_{X,x} \to k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ (przy czym $f^{\#}(\mathfrak{m}_{X,x}) \subset \eta$).

Aby $(f, f^{\#})$ było k-izomorfizmem, musimy mieć $j_Y = j_X \circ f$, a ponadto złożenia odwzorowań snopów na $Spec\,k$ muszą być równe:

$$\mathcal{O}_{Spec\,k} \xrightarrow{j_X^{\#}} (j_X)_*(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{f^{\#}} (j_X)_*(f_*(\mathcal{O}_X)) = (j_Y)_*(\mathcal{O}_Y) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{O}_{Spec\,k} \xrightarrow{j_Y^{\#}} (j_Y)_*(\mathcal{O}_Y)$$

Powyższe snopy są nad przestrzenią jednopunktową, więc są jednoznacznie wyznaczone przez odwzorowania na cięciach globalnych:

$$k \xrightarrow{j_X^\#} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{f^\#} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \quad \text{oraz} \quad k \xrightarrow{j_Y^\#} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$$

czyli po prostu $f^\#|_k = id_k$.

Stąd, jeżeli dla pewnego $x \in X$ istnieje taka para $(f, f^\#)$, to $f^\#$ indukuje k-liniowe przekształcenie na ciałach reszt: $\kappa(x) \hookrightarrow k$. Z drugiej strony jednak, $k \hookrightarrow \kappa(x)$, więc $\kappa(x) = k$.
Załóżmy, że $\kappa(x) = k$. W ciągu dokładnym k-przestrzeni liniowych: $0 \to \mathfrak{m}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(X) = k \to 0$, ostatnie niezerowe odwzorowanie ma cięcie (inkluzja $k \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$), więc jako k-przestrzenie liniowe: $\mathcal{O}_{X,x} = k \oplus \mathfrak{m}_{X,x}$. Stąd $f^\#$ jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości na $\mathfrak{m}_{X,x}$ (ponieważ $f^\#|_k = id_k$). Ale $f^\#(\mathfrak{m}_{X,x}) \subset \eta$, więc $f^\#(\mathfrak{m}_{X,x}^2) \subset \eta^2 = 0$. Stąd już widać, że "dobre" $f^\#$ są w bijekcji z elementami $Hom_k(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2, k) = T_{X,x}$.

Reasumując, każda para $(f, f^\#)$ odpowiada parze $(x \in X, f^\# \in T_{X,x})$ takiej, że $\kappa(x) = k$. Z tego rozumowania wynika od razu, że każda para $(x \in X, f^\# \in T_{X,x})$ (gdzie $\kappa(x) = k$) odpowiada pewnej parze $(f, f^\#)$.

2.2.9

Lemat Punkt y przestrzeni topologicznej Y jest punktem generycznym wtw. gdy należy do każdego niepustego zbioru otwartego wtw. gdy należy do każdego niepustego zbioru otwartego pewnej bazy.
Dowód: mamy: $\overline{\{y\}} = \bigcap_{y \in D} D$, więc $Y = \overline{\{y\}}$ wtw. gdy $\varnothing = \overline{\{y\}}' = (\bigcap_{y\in D} D)' = \bigcup_{y \in D} D' = \bigcup_{y \notin U} U$ – to dowodzi pierwszej równoważności. Druga jest natychmiastowa.

Zauważmy, że schemat afiniczny $Spec\, A$ spełnia warunek zadania – wszystkie zbiory domknięte i nierozkładalne są postaci $V(\mathfrak{p})$ dla pewnego $\mathfrak{p}$; punktem generycznym takiego zbioru jest $\mathfrak{p}$. Ponadto punkt generyczny jest dokładnie jeden – jeżeli $V(\mathfrak{p}_1) = V(\mathfrak{p}_2)$, to $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ oraz $\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1$, więc $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$.

Niech teraz X będzie dowolnym schematem, zaś $D \subset X$ – niepustym nierozkładalnym podzbiorem domkniętym. Niech $U = Spec\, A$ będzie otoczeniem afinicznym dowolnie wybranego punktu z D. Wtedy $D \cap U$ jest nierozkładalnym podzbiorem domkniętym w schemacie afinicznym – ma więc dokładnie jeden punkt generyczny $x \in U \cap D$. Pokażemy, że $\overline{\{x\}} = D$. Z lematu wystarczy pokazać, że dla dowolnego zbioru otwartego $V \subset X$, $V \cap X \neq \varnothing$ mamy: $x \in V \cap D$. Zauważmy, że $D \cap U \cap V \neq \varnothing$ – w przeciwnym wypadku D miałoby dwa rozłączne podzbiory otwarte $D \cap U$ oraz $D \cap V$ i nie byłoby nierozkładalne. Punkt x jest generyczny dla $D \cap U$ w przestrzeni U, więc jest zawarty w każdym otwartym podzbiorze $D \cap U$ – w szczególności w $D \cap U \cap V$, czyli $x \in V$. To dowodzi, że $\overline{\{x\}} = V$.

Pokażemy teraz jednoznaczność. W tym celu załóżmy, że $D = \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Niech $U = Spec\, A$ będzie dowolnym zbiorem otwartym afinicznym spełniającym $D \cap U \neq \varnothing$. Wtedy z lematu: $x, y \in U$. Ale zbiór $D \cap U$ (będący domkniętym nierozkładalnym podzbiorem U) może mieć tylko jeden punkt generyczny – stąd $x = y$.

2.2.12 Niech $X = \coprod_i X_i/\sim$ (suma rozłączna przestrzeni topologicznych wydzielona przez relację $\sim$), gdzie dla $x_i \in X_i$, $x_j \in X_j$:

$$x_i \sim x_j \quad \Leftrightarrow \quad (x_i \in U_{ij}, \quad x_j \in U_{ji}, \quad x_j = \phi_{ij}(x_i))$$

Niech $\Psi_i : X_i \to X$ będzie złożeniem zanurzenia $X_i \to \coprod_i X_i$ z naturalną surjekcją $\coprod_i X_i \to X$. Snop strukturalny na X zdefiniujemy następująco:

$$\mathcal{O}_X(V) = \left\{ (f_i)_i \in \prod_i \mathcal{O}_{X_i}(\Psi_i^{-1}(V)) : \qquad \forall_{i,j} \quad f_i = \varphi_{ij}^\#(f_j) \text{ – równość w } \mathcal{O}_{X_i}\left(U_{ij} \cap \Psi_i^{-1}(V)\right) \right\}$$

(w powyższym zapisie pomijałem restrykcje, zaś $\varphi_{ij}^\#$ oznacza odzorowanie pierścieni:

$$\varphi_{ij}^\#(U_{ji} \cap \Psi_j^{-1}(V)) : \mathcal{O}_{X_j}\left(U_{ji} \cap \Psi_j^{-1}(V)\right) \to (\varphi_{ij})_* \mathcal{O}_{X_i}\left(U_{ji} \cap \Psi_j^{-1}(V)\right) = \mathcal{O}_{X_i}\left(\varphi_{ij}^{-1}(U_{ji} \cap \Psi_j^{-1}(V))\right) =$$

$$= \mathcal{O}_{X_i}\left(U_{ij} \cap \Psi_i^{-1}(V)\right)$$

indukowane przez odwzorowanie snopów $\varphi_{ij}^\# : \mathcal{O}_{U_j} \to (\varphi_{ij})_* \mathcal{O}_{U_i}$).

$\mathcal{O}_X$ jest snopem – niech $V = \bigcup_j V_j \subset X$.

własność jednoznaczności: załóżmy, że $(f_i)_i \in \mathcal{O}_X(V)$ jest trywialne po restrykcji do $\mathcal{O}_X(V_j)$ dla każdego j, tzn. że $\forall_{i,j}\quad f_i$ jest trywialne w $\mathcal{O}_{X_i}(\Psi_i^{-1}(V_j))$. Wtedy z własności jednoznaczności snopa $\mathcal{O}_{X_i}$ mamy: $f_i = 0$ w $\mathcal{O}_{X_i}\left(\bigcup_j \Psi_i^{-1}(V_j)\right) = \mathcal{O}_{X_i}\left(\Psi_i^{-1}(V)\right)$, więc $(f_i)_i = 0$ w pierścieniu $\mathcal{O}_X(V)$.

własność przedłużania: niech $(\mathbf{f}_j)_j \in \prod_j \mathcal{O}_X(V_j)$ (gdzie $\mathbf{f}_j = (f_{ij})_i$) spełniają warunek zgodności. Wtedy dla każdego i rodzina $(f_{ij})_j \in \prod_j \mathcal{O}_{X_i}(\Psi_i^{-1}(V_j))$ spełnia warunek zgodności, więc z własności przedłużania dla snopa $\mathcal{O}_{X_i}$ istnieje $g_i \in \mathcal{O}_{X_i}(\bigcup_j \Psi_i^{-1}(V_j)) = \mathcal{O}_{X_i}(\Psi_i^{-1}(V))$, które po restrykcji do $\Psi_i^{-1}(V_j)$ daje f_{ij}. Ponadto $(g_i)_i$ spełnia warunek $g_a = \varphi_{ab}^{\#}(g_b)$. Istotnie, $\mathbf{f}_j \in \mathcal{O}_X(V_j)$, więc $f_{aj} = \varphi_{ab}^{\#}(f_{bj})$. Stąd restrykcja elementu $g_a - \varphi_{ab}^{\#}(g_b)$ do $\mathcal{O}_{X_a}(\Psi_a^{-1}(V_i) \cap U_{ab})$ jest trywialna dla dowolnego i, więc z własności jednoznaczności $g_a = \varphi_{ab}^{\#}(g_b)$ w $\mathcal{O}_{X_a}(\Psi_a^{-1}(V) \cap U_{ab})$. Otrzymujemy więc $(g_i)_i \in \mathcal{O}_X(V)$, a ponadto oczywiste jest, że $(g_i)_i|_{V_j} = \mathbf{f}_j$.

Definicja $\Psi_i^{\#} : \mathcal{O}_X \to (\Psi_i)_* \mathcal{O}_{X_i}$ – odzorowanie to jest dane przez projekcję: obrazem elementu $(f_i) \in \mathcal{O}_X(V) \subset \prod_i \mathcal{O}_{X_i}(\Psi_i^{-1}(V))$ jest $f_i \in \mathcal{O}_{X_i}(\Psi_i^{-1}(V)) = (\Psi_i)_* \mathcal{O}_{X_i}(V)$.

2.2.15

(a) Niech X będzie schematem skończonego typu nad ciałem k. Pokażemy, że punkt $x \in X$ jest domknięty wtw. $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ jest algebraicznym rozszerzeniem k.
Zaczniemy od wykazania, że jeżeli B jest algebrą skończonego typu nad ciałem k, to ideał $\mathfrak{p} \in Spec(B)$ jest maksymalny wtw. gdy $\kappa(\mathfrak{p})/k$ jest skończonym rozszerzeniem ciał. Istotnie, ideał $\mathfrak{p}$ jest maksymalny wtw. gdy $ht(\mathfrak{p}) = \dim R$ wtw. gdy $trdeg_k(Frac(B/\mathfrak{m})) = dim(B/\mathfrak{m}) = \dim B - ht(\mathfrak{p}) = 0$ wtw. gdy $\kappa(\mathfrak{p}) = Frac(B/\mathfrak{m})$ jest algebraicznym i skończenie generowanym rozszerzeniem k wtw. gdy $\kappa(\mathfrak{p})/k$ jest skończonym rozszerzeniem ciał.
Niech teraz X będzie dowolnym schematem skończonego typu nad ciałem k, zaś U_i – pokryciem otwartym afinicznym X. Powyżej udowodniliśmy, że jeżeli $[\kappa(x) : k] < \infty$, to x jest domknięty w każdym U_i, więc:

$$cl_X(P) = \bigcup_i cl_X(P) \cap U_i = \bigcup_i cl_{U_i}(P) = \{P\}$$

Jeżeli zaś x jest domknięty w X, to jest domknięty w każdym U_i, więc znowu wystarczy skorzystać z tego, co udowodniliśmy wyżej.

(b) zgodnie z założeniem mamy homomorfizm $f^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$ taki, że $(f^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_{X,P}) = \mathfrak{m}_{Y,f(P)}$; w szczególności $\mathfrak{m}_{Y,f(P)} = f^{\#}(\mathfrak{m}_{Y,f(P)})$. Oznacza to, że $f^{\#}$ indukuje monomorfizm ciał reszt (będący jednocześnie homomorfizmem k-algebr):

$$f^{\#} : \kappa(f(P)) = \mathcal{O}_{Y,f(P)}/\mathfrak{m}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_{X,P} = \kappa(P) = k$$

Dostajemy więc inkluzje: $k \subset \kappa(f(P)) \subset k$ (pierwsza inkluzja – ze struktury k-algebry), czyli $\kappa(f(P)) = k$.

(c) Załóżmy, że $t(f) = t(g)$ – wtedy w szczególności $t(f)$ oraz $t(g)$ są równe na punktach domkniętych, więc $f = g$, co dowodzi iniektywności. Niech $F \in Hom_{Sch}(t(V), t(W))$ – wtedy z podpunktów (a) oraz (b) F przenosi punkty domknięte na domknięte, więc dostajemy poprawnie zdefiniowane odwzorowanie $f : V \to W$. Pozostaje wykazać jego regularność. Wybierzmy dowolne otoczenie afiniczne $S = Spec\, B \subset t(W)$ – wtedy z ciągłości F istnieje $U = Spec\, A \subset t(V)$, będące otoczeniem P i spełniające $U \subset F^{-1}(S)$. To daje $F(U) \subset F(F^{-1}(S)) \subset S$. Odwzorowanie $F|_U : U \to S$ musi być indukowane przez homomorfizm pierścieni $B \to A$, który zadaje odwzorowanie regularne na odpowiednich rozmaitościach afinicznych.

2.2.16

(a) mamy:

$$U \cap X_f = \{x \in Spec(B) : \overline{f} \notin \mathfrak{m}_x\} = \{\mathfrak{p} \in Spec(B) : \overline{f} \notin \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}\} = \{\mathfrak{p} \in Spec(B) : \overline{f} \notin \mathfrak{p}\} = D(\overline{f})$$

(jak łatwo zauważyć: $f/1 \notin \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \Leftrightarrow \quad f \notin \mathfrak{p}$). Stąd, jeżeli $(Spec(B_i))_i$ jest pokryciem afinicznym X, to $X_f = \bigcup_i X_f \cap Spec(B_i)$ jest zbiorem otwartym jako suma zbiorów otwartych.

(b) X jest quasizwarte, więc ma skończone pokrycie schematami afinicznymi: $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, gdzie $U_i = Spec(B_i)$. Jeżeli restrykcja a do $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$ zeruje się, to również restrykcje $a_i \in \Gamma(X_f \cap U_i, \mathcal{O}_X) = \Gamma(D_{B_i}(\overline{f}), \mathcal{O}_X) = (B_i)_f$ zerują się. Z definicji lokalizacji: $a_i = 0 \Leftrightarrow$ obraz $a|_{X_f \cap U_i}$ zeruje się w $(B_i)_f \Leftrightarrow a|_{U_i} \cdot f^{n_i} = 0$ dla pewnego $n_i \in \mathbb{N}$. Niech $n > \max\{n_i : i = 1, \ldots, m\}$. Wtedy restrykcja $a \cdot f^n$ zeruje się w $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ dla każdego i, więc z własności jednoznaczności snopa, $a \cdot f^n = 0$ w $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

(c) mamy: $b|_{X_f \cap U_i} \in \Gamma(X_f \cap U_i, \mathcal{O}_{X_f}) = (B_i)_{\overline{f}}$, czyli $b|_{U_i} = b_i / f^{n_i}$ dla pewnych $b_i \in B_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$; (bez straty ogólności, zwiększając wykładniki: $n_1 = n_2 = \ldots = n$). Mamy $b_i|_{U_i \cap X_f} = b \cdot f^n$, więc:

$$b_i|_{U_i \cap U_j \cap X_f} = b \cdot f^n = b_j|_{U_i \cap U_j \cap X_f}$$

Korzystając z quasizwartości $U_i \cap U_j$ oraz stosując (b) do $U_i \cap U_j$ stwierdzamy, że $b_i|_{U_i \cap U_j} \cdot f^N = b_j|_{U_i \cap U_j} \cdot f^N$ dla dostatecznie dużego N oraz dowolnych i, j. Stąd z warunku przedłużania dla rodziny $(b_i \cdot f^N)_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ stwierdzamy, że istnieje $\eta \in \mathcal{O}_X(X)$ takie, że $\eta|_{U_i} = b_i \cdot f^N$. Wtedy mamy: $\eta|_{U_i \cap X_f} = b|_{U_i \cap X_f}$, więc z warunku jednoznaczności: $\eta|_{X_f} = b$.

(d) zauważmy najpierw, że $f|_{X_f} \in \mathcal{O}_X(X_f)$ jest odwracalne. Istotnie, $f|_{X_f}$ jest odwracalne w $\mathcal{O}_X(X_f \cap U_i) = D_{B_i}(\overline{f}) = Spec((B_i)_f)$ dla każdego i, tzn. $f \cdot \eta_i = 1$ w $\mathcal{O}_X(X_f \cap U_i)$. Łatwo zauważyć, że $(\eta_i)_i$ spełniają warunek przedłużania, więc można przedłużyć je do elementu $\eta \in \mathcal{O}_X(X_f)$ spełniającego (z jednoznaczności) $f \cdot \eta = 1$.

Rozważmy przekształcenie $\Psi(a/f^n) = a|_{X_f} \cdot \eta^n : A_f \to \mathcal{O}_X(X_f)$. Jest ono "na" (z podpunktu (c)) oraz jest iniekcją – jeżeli $\Psi(a/f^n) = a|_{X_f} \cdot \eta^n = 0$, to $a|_{X_f} = 0$, więc z podpunktu (b) mamy: $a \cdot f^N = 0$ dla dostatecznie dużego N oraz $a/f^n = 0$ w A_f (definicja lokalizacji).

2.2.17

(a) Z własności topologicznych łatwo wynika, że $f : X \to Y$ jest homeomorfizmem. Wystarczy pokazać, że $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ jest izomorfizmem snopów. Ale $f^{\#}(U_i) : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X(U_i)$ są izomorfizmami, zatem $f^{\#}$ jest izomorfizmem na źdźbłach. To oznacza, że $f^{\#}$ jest izomorfizmem.

(b) ($\Rightarrow$) Oczywiste.
($\Leftarrow$) Załóżmy, że $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_X(X) =: A$ spełniają podany warunek. Niech $Y := Spec(A)$ – wtedy z zadania II.2.4 mamy naturalny homomorfizm $\varphi : Y \to X$. Z zadania II.2.16 (d) $A_{f_i} = \Gamma(\mathcal{O}_{X_{f_i}}, X_{f_i}) \to X_{f_i}$. Mamy zatem naturalny morfizm $Spec(A_{f_i}) \to X_{f_i}$, który jest izomorfizmem, jako że X_{f_i} jest afiniczne z założenia.
Zauważmy ponadto, że $\bigcup_i X_{f_i} = X$. Istotnie, dla dowolnego zbioru afinicznego $U = Spec(B)$ (gdzie B musi być A-algebrą) mamy:

$$\bigcup_i X_{f_i} \cap U = \bigcup_i D_B(f_i) = D_B((f_1, \ldots, f_n)) = D_B(1) = Spec(B) = X \cap U,$$

jako że $(f_1, \ldots, f_n) = A$.
Stąd $\varphi : Y \to X$ jest izomorfizmem na pokryciu otwartym zbioru X, zatem z poprzedniego podpunktu φ jest izomorfizmem.

2.2.18

(a) $\varnothing = D(f) = \{\mathfrak{p} \trianglelefteq A : f \notin \mathfrak{p}\} \Leftrightarrow \forall_{\mathfrak{p}} \quad f \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow f \in \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = Nil(A)$ (ostatnia równość – np. z [Atiyah, MacDonald, Stwierdzenie 1.8]).

(b) Jeżeli $f^{\#}$ jest iniekcją, to snop $\ker f^{\#}$ jest zerowy, więc $\ker(\varphi) = \ker(f^{\#})(X) = 0$, więc φ jest iniekcją. ABy udowodnić drugą implikację, skorzystamy z:

Lemat Niech $\mathcal{F}$ będzie snopem na przestrzeni X o bazie topologii $(B_i)_i$. Wtedy $\mathcal{F} = 0$ wtw. gdy $\forall_i \quad \mathcal{F}(B_i) = 0$.
Dowód: Jeżeli U jest dowolnym zbiorem otwartym, to $U = \bigcup_{i \in S} B_i$ dla pewnego zbioru S (z definicji bazy). Z własności jednoznaczności snopa: $\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \prod_{i \in S} \mathcal{F}(B_i) = 0$, więc $\mathcal{F}(U) = 0$.

Załóżmy, że $\varphi : A \to B$ jest iniekcją. Z **lematu** wystarczy pokazać, że dla dowolnego $a \in A$ grupa $\ker f^{\#}(D(a))$ jest zerowa. Ale

$$\ker f^{\#}(D(a)) = \ker(f^{\#} : \mathcal{O}_X(D(a)) \to f_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(D(a))) = \ker(\varphi : A_a \to B_{\varphi(a)}) = \left\{\frac{x}{a} \in A_a : \varphi(\frac{x}{a}) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} = 0\right\} =$$

$$= \left\{\frac{x}{a} \in A_a : \exists_n \quad \varphi(x) \cdot \varphi(a)^n = 0\right\} = \left\{\frac{x}{a} \in A_a : \exists_n \quad x \cdot a^n = 0\right\} = 0$$

(skorzystaliśmy z iniektywności φ oraz definicji lokalizacji na elemencie).

ad. f **jest dominujące:** załóżmy nie wprost, że $\overline{f(Y)} \subsetneq X$ – wtedy istniałoby $a \in A$, $a \notin Nil(A)$ takie, że $\overline{f(Y)} \subset V(a)$ (zauważmy, że $\{D(a)\}_{a \in A}$ jest bazą topologii na $Spec(A)$). Wtedy, z iniektywności: $\varphi(a) \notin Nil(B) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(B)} \mathfrak{p}$, więc $\varphi(a) \notin \mathfrak{p}$ dla pewnego $\mathfrak{p} \in Spec(B)$, co daje $f(\mathfrak{p}) \in V(a) \backslash \overline{f(Y)}$ – sprzeczność kończy dowód.

(c) jeżeli $I = \ker \varphi$, to $B \cong A/I$ oraz $f : Spec\, B \to Spec\, A$ jest homeomorfizmem na zbiór domknięty $V(I) \subset Spec\, A$ (*wykład z algebry przemiennej*). Aby wykazać surjektywność odwzorowania $\mathcal{O}_{Spec\, A} \to f_*\mathcal{O}_{Spec\,(A/I)}$, sprawdzimy ją na źdźbłach. Niech $\mathfrak{p} \in Spec\, A$. Wtedy, jeżeli $\mathfrak{p} \in V(I)$, to:

$$(f_*\mathcal{O}_{Spec\,(A/I)})_{\mathfrak{p}} = \lim_{U \ni \mathfrak{p}} \mathcal{O}_{Spec\,(A/I)}(U \cap V(I)) = \lim_{V \ni \overline{\mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{Spec\,(A/I)}(V) = (\mathcal{O}_{Spec\,(A/I)})_{\overline{\mathfrak{p}}} = (A/I)_{\overline{\mathfrak{p}}} \cong A_{\mathfrak{p}}/IA_{\mathfrak{p}}$$

(ponieważ wszystkie zbiory otwarte w $Spec(A/I)$ są postaci $V = U \cap V(I)$ dla pewnego zbioru otwartego $U \subset Spec(A)$) – w tym przypadku odwzorowania źdźbeł $(\mathcal{O}_{Spec\, A})_{\mathfrak{p}} \to (f_*\mathcal{O}_{Spec\,(A/I)})_{\mathfrak{p}}$ są odwzorowaniami kononicznymi $A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}/IA_{\mathfrak{p}}$, są więc surjektywne. Dla $\mathfrak{p} \notin V(I)$:

$$(f_*\mathcal{O}_{Spec\,(A/I)})_{\mathfrak{p}} = \lim_{U \ni \mathfrak{p}} \mathcal{O}_{Spec\,(A/I)}(U \cap V(I)) = 0$$

więc odwzorowania źdźbeł są również surjektywne.

(d) niech $A' = A/\ker \varphi$, $X' = Spec(A')$. Wtedy X' jest domkniętym podzbiorem X. Ponadto odwzorowanie $\varphi' : A' \to B$ jest iniekcją, więc z (b) odwzorowanie $\mathcal{O}_{X'} \to f'_*\mathcal{O}_Y$ jest iniekcją oraz surjekcją (jako że złożenie $\mathcal{O}_X \to f'_*\mathcal{O}_{X'} \to f_*\mathcal{O}_Y$ jest surjekcją), czyli izomorfizmem. Stąd jest też izomorfizmem na cięciach: $A' = \mathcal{O}_{X'}(X') \cong f'_*\mathcal{O}_Y(X') = B'$, który jest z definicji indukowany przez φ'.

Podrozdział 2.3

2.3.2 Niech $(V_i)_i = (Spec(A_i))_i$ będzie otwartym pokryciem Y, spełniającym warunek z zadania, zaś $V = Spec(C)$ – dowolnym afinicznym zbiorem otwartym. Wtedy $\{D_{A_i}(a) : a \in V_i\}$ jest bazą topologii na Y. Zbiór V jest quasizwarty i otwarty, więc można go pokryć skończoną liczbą zbiorów z bazy: $V = \bigcup_{i,j} D_{A_i}(a_j)$, czyli $f^{-1}(V) = \bigcup_{i,j} f^{-1}(D_{A_i}(a_j))$. Skończona suma zbiorów quasizwartych jest quasizwarta, więc wystarczy pokazać, że $D_{A_i}(a)$ jest quasizwarte – to wynika z następującego lematu (przyjmując $Z := f^{-1}(V_i)$, $A := A_i$):

Lemat Jeżeli $f : Z \to Spec(A)$ jest morfizmem schematów oraz Z jest quasizwarte, to dla każdego $a \in A$ zbiór $f^{-1}(D(a))$ jest quasizwarty.
Dowód: Z jest on z założenia quasizwarty, więc ma skończone pokrycie zbiorami otwartymi afinicznymi: $Z = \bigcup_{k=1}^{n} W_k$, gdzie $W_k = Spec(B_k)$. Wtedy odwzorowanie $W_k \to Spec(A)$ jest zadane przez homomorfizm $\varphi_k : A \to B_k$. Łatwo zauważyć, że $f^{-1}(D(a)) \cap W_k \cong D_{B_k}(\varphi_k(a)) = Spec((B_k)_{\varphi_k(a)})$ jest zbiorem quasizwartym. Stąd $f^{-1}(D(a)) = \bigcup_k f^{-1}(D(a)) \cap W_k$ jest quasizwarte jako skończona suma zbiorów quasizwartych.

2.3.3

(a) Niech f będzie morfizmem lokalnie skończonego typu i quasizwartym. Wtedy $Y = \bigcup_i U_i$, gdzie $U_i = Spec(A_i)$, $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{ij}$, $V_{ij} = Spec(B_{ij})$, gdzie B_{ij} są A_i-algebrami skończonego typu. Ponadto, z zadania 2.3.2 i quasizwartości f, pokrycie otwarte $(V_{ij})_j$ zbioru quasizwartego U_i ma podpokrycie skończone $(W_{ij})_j$ – stąd f jest skończonego typu. Druga implikacja jest oczywista.

(b) Pokażemy to podobnie, jak w 2.3.2:
Niech $(V_i)_i = (Spec(A_i))_i$ będzie otwartym pokryciem Y, spełniającym warunek skończonego typu, zaś $V = Spec(B)$ – dowolnym afinicznym zbiorem otwartym. Wtedy $\{D_{A_i}(a) : a \in V_i\}$ jest bazą topologii na Y. Zbiór V jest quasizwarty i otwarty, więc można go pokryć skończoną liczbą zbiorów z bazy: $V = \bigcup_{i,j} D_{A_i}(a_j)$, czyli $f^{-1}(V) = \bigcup_{i,j} f^{-1}(D_{A_i}(a_j))$. Bez straty ogólności można przyjąć, że zbiory $D_{A_i}(a_j)$ są również otwarte standardowe w $Spec(B)$ (tzn. postaci $D_B(b_{ij})$) – wtedy $(A_i)_{a_j} \cong B_{b_{ij}}$ jest B-algebrą skończonego typu. Wystarczy więc pokazać (przyjmując $Z := f^{-1}(V_i)$, $A := A_i$):

Lemat Jeżeli $f : Z \to Spec(A)$ jest morfizmem schematów oraz $Z = \bigcup_{k=1}^{n} W_k$, $W_k = Spec(B_k)$, gdzie B_k jest A-algebrą skończonego typu, to dla każdego $a \in A$ zbiór $f^{-1}(D(a))$ można pokryć skończoną liczbą zbiorów afinicznych pochodzących od A_a-algebr skończonego typu.
Dowód: Mamy: $f^{-1}(D(a)) \cap W_k \cong D_{B_k}(\varphi_k(a)) = Spec((B_k)_{\varphi_k(a)})$, więc wystarczy zauważyć, że $(B_k)_{\varphi_k(a)}$ jest A_a-algebrą skończonego typu oraz że $f^{-1}(D(a)) = \bigcup_k f^{-1}(D(a)) \cap W_k$.

(c) z podpunktu (b) mamy: $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, gdzie $U_i = Spec(A_i)$, zaś A_i jest B-algebrą skończonego typu. Wtedy $\{D_{A_i}(a) : a \in A_i\}$ jest bazą topologii na $f^{-1}(V)$, więc z quasizwartości mamy: $U = \bigcup_{i,j} D_{A_i}(a_j)$. Zauważmy przy tym, że $D_{A_i}(a_j) = Spec((A_i)_{a_j})$, zaś $(A_i)_{a_j}$ jest B-algebrą skończonego typu.
Wystarczy więc pokazać, że jeżeli $Spec(A) \to Spec(B)$ jest morfizmem schematów, zaś $Spec(A)$ można pokryć zbiorami otwartymi afinicznymi pochodzącymi od B-algebr skończonego typu, to A jest B-algebrą skończonego typu. Niech $W = Spec(C) \subset Spec(A)$ będzie podschematem otwartym, pochodzącym od B-algebry skończonego typu. Wtedy W może być pokryte zbiorami postaci $D_A(f) \cong Spec(A_f)$ dla $f \in A$ oraz $D_A(f) \cong D_C(\overline{f})$ (gdzie $\overline{f}$ jest obrazem f przy przekształceniu $A \to C$) – stąd $A_f \cong C_{\overline{f}}$ oraz A_f jest algebrą skończonego typu. Stąd $Spec(A)$ możemy pokryć skończenie wieloma (z quasizwartości) zbiorami postaci $D_A(f)$, gdzie A_f jest B-algebrą skończonego typu. Wystarczy więc wykazać:

Lemat Niech $(f_1, \ldots, f_n) = A$ i załóżmy, że A ma strukturę B-algebry, która dla każdego i indukuje na A_{f_i} strukturę B-algebry skończonego typu. Wtedy A jest B-algebrą skończonego typu.
Dowód: niech $\sum_i g_i f_i = 1$ i niech $(x_{ij}/f_i^N)_j$ generuje B-algebrę A_{f_i} dla każdego i. Niech $C \subset A$ będzie B-algebrą generowaną przez zbiór $\{f_i\}_i \cup \{g_i\}_i \cup \{x_{ij}\}_{ij}$ – wykażemy, że $A = C$. Niech $a \in A$. Wtedy $a/f_i^M = \sum_j b_j (x_{ij}/f_i^N)^{m_{ij}}$ dla pewnych $b_j \in B$, $m_{ij} \in \mathbb{N}$, więc $f_i^T \cdot (a f_i^M - \sum_j b_j x_{ij}^{N m_{ij}} f_i^{s_{ij}}) = 0$, czyli $a \cdot f_i^D \in C$ dla dostatecznie dużego D.

Z lematu poniżej, istnieją $c_i \in C$ takie, że $1 = \sum_i c_i f_i^D$ – wtedy $a = \sum_i c_i \cdot (f_i^D \cdot a) \in C$.

Lemat Niech $f_1, \ldots, f_n, g_1, ..., g_n \in A$ i niech $\sum_i g_i f_i = 1$. Wtedy dla każdego $N > 0$ istnieją $c_1, ..., c_n \in \mathbb{Z}[f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n]$ takie, że $\sum_i c_i f_i^N = 1$.
Dowód: $1 = (\sum_{i=1}^{n} g_i f_i)^{nN} = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \binom{nN}{i_1,\ldots,i_n} (g_1 f_1)^{i_1} \ldots (g_n f_n)^{i_n} = \sum_i c_i f_i^N$ (w każdym składniku występuje f_i^N dla pewnego i).

2.3.5

(a) Z definicji skończonego morfizmu wystarczy pokazać, że jeżeli B jest skończoną A-algebrą (tzn. skończenie generowanym A-modułem), to odwzorowanie $Spec(B) \to Spec(A)$ ma skończone włókna. Włóknem $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ jest $Spec(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B)$. Zauważmy, że $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ jest skończenie wymiarową przestrzenią $\kappa(\mathfrak{p})$-liniową – istotnie, jeżeli $B = b_1 A + \ldots + b_n A$, to $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B = (b_1 \otimes 1)\kappa(\mathfrak{p}) + \ldots + (b_n \otimes 1)\kappa(\mathfrak{p})$. Ale skończona algebra nad ciałem jest pierścieniem Artina – istotnie, ideały są jednocześnie podprzestrzeniami wektorowymi, więc spełniają warunki skończonych łańcuchów. Stąd $f^{-1}(\mathfrak{p}) = Spec(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B)$ jest skończone.

(b) niech $D \subset X$ będzie zbiorem domkniętym. Wtedy wystarczy pokazać, że dla dowolnego zbioru afinicznego $V = Spec(B) \subset Y$ zbiór $f(D) \cap V$ jest domknięty w V. Niech $U = f^{-1}(V)$ – wtedy z założenia $U = Spec(A)$ dla pewnego A, które jest skończoną B-algebrą, zadaną przez $\varphi : B \to A$. Mamy: $f(D) \cap V = f(D \cap f^{-1}(V)) = f(D \cap U)$. Zauważmy, że $f = \varphi^* : Spec(A) \to Spec(B)$ jest skończone – jest więc całkowite.

Lemat (Atiyah-MacDonald, zadanie 5.1)
Jeżeli $\varphi : B \to A$ jest całkowite, to $f = \varphi^* : Spec(A) \to Spec(B)$ jest domknięte.
Dowód: Niech $C = B/\ker\varphi$, oraz $\phi : C \to A$ będzie iniekcją indukowaną przez φ. Wtedy $Spec(C) \to Spec(B)$ jest homeomorfizmem na zbiór domknięty $V(\ker\varphi)$, jest więc domknięte. Wystarczy wykazać, że $g = \phi^* : Spec(A) \to Spec(C)$ jest domknięte. Niech $I \trianglelefteq A$. Wykażemy, że $g(V(I)) = V(I^c)$, gdzie $I^c = \phi^{-1}(I) \trianglelefteq C$– istotnie:

- jeżeli $I \subset \mathfrak{p}$, to $I^c = \phi^{-1}(I) \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p})$, więc $g(V(I)) \subset V(I^c)$,
- załóżmy, że $I^c \subset \mathfrak{q}$. Rozważmy przekształcenie $C/I^c \to A/I$ – jest ono całkowite, więc z twierdzenia [Atiyah-MacDonald, Twierdzenie 5.10] odwzorowanie $Spec(A/I) \to Spec(C/I^c)$ jest "na". Niech $\overline{\mathfrak{p}} \in Spec(A/I)$ będzie przeciwobrazem $\overline{\mathfrak{q}} \in Spec(C/I^c)$ przy tym odwzorowaniu. Wtedy $I \subset \mathfrak{p}$, więc $\mathfrak{q} = g(\mathfrak{p}) \in g(V(I))$, czyli $V(I^c) \subset g(V(I))$.

Stąd $f : Spec(A) \to Spec(B)$ jest domknięte oraz $f(D) \cap V = f(D \cap U)$ jest zbiorem domkniętym w V.

(c) ???

2.3.6 Niech $U = Spec\, A$ będzie dowolnym otoczeniem afinicznym punktu generycznego ξ, gdzie A jest dziedziną całkowitości. Wtedy punktem generycznym $Spec\, A$ jest ideał zerowy, więc $\xi = (0)$ oraz $\mathcal{O}_\xi = A_{(0)} = Frac(A)$, co dowodzi tezy.

2.3.7

Krok I: jeżeli $X = Spec(B)$, $Y = Spec(A)$ spełniają założenia, to istnieją $a \in A$, $b \in B$ takie, że $D(b) = f^{-1}(D(a)) \to D(a)$ jest skończonym odwzorowaniem.

Oznaczmy przez η punkt generyczny w $Spec(A)$, $K = Frac(A)$, $L = Frac(B)$. Zauważmy, że (lemat w zadaniu 2.3.8) morfizm $X \to Y$ pochodzi od zanurzenia $A \hookrightarrow B$.

Krok I.1: L/K jest skończonym rozszerzeniem ciał

Z założenia i zadania 3.3(c), B jest algebrą skończonego typu nad A: $B = A[b_1, ..., b_n]$. Ponadto $f^{-1}(\eta) = Spec(B \otimes_A K)$ jest skończone, czyli $B \otimes_A K$ jest pierścieniem Artina. Ale algebra skończonego typu nad ciałem jest pierścieniem Artina wtw. gdy jest skończona (Atiyah-MacDonald, zadanie 8.3). Stąd $B \otimes_A K$ jest skończenie wymiarową przestrzenią K-liniową.

Zauważmy, że każdy element L jest postaci $\frac{b}{a}$ dla $b \in B$, $a \in A$; wtedy $\frac{b}{a} = F(b \otimes \frac{1}{a})$. Istotnie, z własności normy rozszerzenia ciał, ułamek $\frac{b_1}{b_2}$ można zawsze rozszerzyć tak, by jego mianownik należał do $K = Frac(A)$. Stąd odwzorowanie $F : B \otimes_A K \to L$, $F(b \otimes k) = b \cdot k$ jest surjekcją, więc $dim_K(L) \leqslant dim_K(B \otimes_A K) < \infty$.

Krok I.2: B_x jest skończonym A_x-modułem dla pewnego $x \in A_x$:

Niech $L = Kb_1 + \ldots + Kb_n$, gdzie $b_i \in B$. Zdefiniujmy: $A' = Ab_1 + ... + Ab_n$. Wtedy $Frac(A') = L$ oraz B jest A'-algebrą skończonego typu (bo jest A-algebrą skończonego typu). Niech $B = A'[\beta_1, \ldots, \beta_m]$. Wtedy $\beta_i \in L = Frac(A')$, więc $\beta_i = \frac{a_i}{\alpha_i}$ dla $a_i, \alpha_i \in A'$; bez straty ogólności niech $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n =: \alpha$. Niech $N_{L/K}(\alpha) = \frac{x}{y}$ dla $x, y \in A$. Wtedy:

$$\beta_i = \frac{a_i}{\alpha_i} = \frac{(\text{element z } A')}{x} \in A'_x \qquad \Rightarrow \qquad B = A'[\beta_1, \ldots, \beta_m] \subset A'_x \Rightarrow B_x = A'_x = A_x b_1 + ... + A_x b_n$$

czyli B_x jest skończoną A_x-algebrą oraz odwzorowanie $D_B(x) \to D_A(x)$ jest skończone.

Krok II: ogólny przypadek.

Niech $V = Spec(A) \subset Y$ będzie dowolnym otwartym afinicznym podzbiorem w Y, wtedy z założenia o skończonym typie: $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n U_i$, gdzie $U_i = Spec(B_i)$ oraz B_i jest A-algebrą skończonego typu. Z **Kroku I** dla każdego i istnieje $D(a_i) \subset V$ takie, że $f^{-1}(D(a_i)) \cap U_i \to D(a_i)$ jest skończonym odwzorowaniem oraz że $W_i := f^{-1}(D(a_i)) \cap U_i = D_{B_i}(b_i) \cong Spec(C_i)$ (gdzie $C_i = Spec((B_i)_{b_i})$).

Lemat ("o afinicznej komunikacji", Ravi Vakil, str. 155)
Jeżeli U, V są podzbiorami otwartymi afinicznymi schematu Y, to $U \cap V$ ma bazę topologii złożoną ze zbiorów, które są standardowe otwarte zarówno w U, jak i w V.
Jeżeli $W_1, \ldots, W_n$ są podzbiorami otwartymi afinicznymi (tzn. $W_i = Spec(C_i)$) nierozkładalnego schematu Y, to mają one wspólny podstawowy zbiór afiniczny: istnieją $c_i \in C_i$ takie, że $D_{C_i}(c_i) = D_{C_j}(c_j) \neq \varnothing$. dla dowolnych i, j.
Dowód: Niech $U = Spec(A)$, $V = Spec(B)$. Wtedy $U \cap V$ można pokryć zbiorami $D_A(c) \subset U \cap V$, więc bez straty ogólności (zastępując A przez A_c) możemy założyć, że $U = Spec(A) \subset V = Spec(B)$ oraz że inkluzja jest indukowana przez homomorfizm $\varphi : B \to A$. Wtedy U można pokryć zbiorami postaci $D_B(d) \subset U = Spec(A)$, gdzie $d \in B$. Ale $D_B(d) \cong D_A(\varphi(d))$, co kończy dowód pierwszej części stwierdzenia. Druga część stwierdzenia wynika z pierwszego przez indukcję – dla $n = 2$ jest to pierwsza część lematu. Niech $n \geqslant 3$. Załóżmy, że $Spec((C_i)_{\gamma_i}) = Spec((C_j)_{\gamma_j})$ dla $i, j \neq n$, tzn. że $(C_i)_{\gamma_i} \cong (C_j)_{\gamma_j}$. Wtedy wystarczy przyjąć $C = (C_1)_{\gamma_1}$, $D = C_n$ w przypadku $n = 2$.

Niech $c_i \in C_i$ będą takie, jak w lemacie. C_i jest skończonym A-modułem, więc c_i spełnia równanie unormowane o współczynnikach w A. Niech $a_i \in A$, $a_i \neq 0$ będzie wyrazem wolnym dowolnego takiego równania i niech $a := a_1 \ldots a_n$. Wtedy $Spec((C_i)_a) \subset Spec((C_i)_{c_i})$ (jeżeli c_i należy do pewnego ideału pierwszego to a również) oraz

$$f^{-1}(A_a) \cap Spec(C_i) = Spec((C_i)_a) = Spec((C_j)_a) = f^{-1}(A_a) \cap Spec(C_j)$$

dla dowolnych i, j, więc $f^{-1}(A_a) = Spec((C_i)_a)$ co dowodzi skończoności f nad $D_A(a)$.

2.3.8

Lemat (o dominujących odwzorowaniach całkowitych schematów)
Jeżeli X, Y – schematy całkowite, to morfizm $f : X \to Y$ jest zdominowany wtw. gdy $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ jest iniekcją.
Dowód: załóżmy najpierw, że $Y = Spec(A)$ jest afiniczne oraz że $\varphi : Y \to \mathcal{O}_X(X)$. Wtedy $f^{-1}(D(a)) = X_{\varphi(a)} := \{x \in X : \varphi(a)_x \notin \mathfrak{m}_x\}$. Mamy: f jest zdominowane wtw. gdy $f^{-1}(D(a)) \neq \varnothing$ dla każdego $a \neq 0$ wtw. gdy $X_{\varphi(a)} \neq \varnothing$ wtw. gdy $\varphi(a) \neq 0$ w $\mathcal{O}_X(X)$ (zadanie 2.16 (b)).

W ogólnym przypadku: $f : X \to Y$ jest zdominowane wtw. gdy $f : f^{-1}(V) \to V$ jest zdominowane dla każdego $V \subset Y$ - afinicznego wtw. (z poprzednich rozważań) gdy $f^{\#} : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ jest iniekcją dla każdego V afiniczego, czyli wtw. gdy $f^{\#}$ jest iniekcją.

Lemat Jeżeli Z jest schematem normalnym, to $\mathcal{O}_Z(Z)$ jest pierścieniem normalnym.
Dowód: niech $f/g \in Frac(\mathcal{O}_Z(Z))$ będzie elementem całkowitym nad $\mathcal{O}_Z(Z)$. Wtedy $f_x/g_x \in Frac(\mathcal{O}_{Z,x})$ jest elementem całkowitym nad $\mathcal{O}_{Z,x}$, więc $f_x/g_x \in \mathcal{O}_{Z,x}$. Z własności jednoznaczności i przedłużania: $f/g \in \mathcal{O}_Z(Z)$.

Krok I: $Spec(\widetilde{A})$ jest normalizacją schematu $Spec(A)$ (tzn. spełnia opisany warunek uniwersalności).

D: każdy zdominowany morfizm $Z \to Spec(A)$ (gdzie Z–schemat normalny) odpowiada zanurzeniu $A \hookrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$. Ale z **Lematu** $\mathcal{O}_Z(Z)$ jest normalny, więc z własności uniwersalności domknięcia całkowitego, mamy faktoryzację: $A \hookrightarrow \widetilde{A} \hookrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$, dającą faktoryzację $Z \to Spec(\widetilde{A}) \to Spec(A)$.

Krok II: jeżeli $D_A(\mathfrak{a}) \subset Spec(A)$ jest zbiorem otwartym, to $D_{\widetilde{A}}(\widetilde{\mathfrak{a}})$ jest normalizacją schematu $D_A(\mathfrak{a})$ (gdzie $\widetilde{\mathfrak{a}}$ jest domknięciem całkowitym $\mathfrak{a}$ w $\widetilde{A}$).

D: niech Z–schemat normalny, $Z \to D_A(\mathfrak{a})$ – zdominowany morfizm. Wtedy z własności uniwersalności dla morfizmu $Z \to D_A(\mathfrak{a}) \to Spec(A)$, dostajemy faktoryzację: $Z \to D_A(\mathfrak{a}) \to Spec(\widetilde{A}) \to Spec(A)$. Wystarczy zauważyć, że obrazem $D_A(\mathfrak{a})$ w $Spec(\widetilde{A})$ jest $D_{\widetilde{A}}(\widetilde{\mathfrak{a}})$.

Krok III: „sklejanie":

niech X będzie dowolnym schematem, zaś $(U_i)_i = (Spec(A_i))_i$ – rodziną jego otwartych podzbiorów afinicznych. Niech $U_{ij} := U_i \cap U_j$ – wtedy $U_{ij} = U_{ji}$ oraz $U_{ij} = D_{A_i}(\mathfrak{a}_{ij}) = D_{A_j}(\mathfrak{a}_{ji})$ dla pewnych ideałów $\mathfrak{a}_{ij} \trianglelefteq A_i, \mathfrak{a}_{ji} \trianglelefteq A_j$. Niech $\widetilde{U_i} = Spec(\widetilde{A_i}), \widetilde{U_{ij}} = D_{\widetilde{A_i}}(\widetilde{\mathfrak{a}_{ij}})$. Wtedy z jednoznaczności normalizacji, istnieją izomorfizmy $\varphi_{ij} : D_{\widetilde{A_i}}(\widetilde{\mathfrak{a}_{ij}}) \to D_{\widetilde{A_j}}(\widetilde{\mathfrak{a}_{ji}})$, spełniające założenia lematu o sklejaniu – stąd $(\widetilde{U_i})$ można skleić do schematu $\widetilde{X}$. Morfizmy $\widetilde{U_i} \to U_i \to X$ są zgodne, więc można je skleić do morfizmu $\widetilde{X} \to X$.
Jeżeli X jest skończonego typu nad ciałem k, to $\widetilde{X} \to X$ jest skończonym morfizmem – istotnie, przeciwobrazem zbioru afinicznego U_i jest $\widetilde{U_i}$, ale $\widetilde{A_i}$ jest skończenie generowanym A_i-modułem (Hartshorne, Theorem I.3.9 A).

Krok IV: własność uniwersalności dla $\widetilde{X} \to X$:

niech $\varphi : Z \to X$ będzie morfizmem ze schematu normalnego Z. Niech $Z_i := \varphi^{-1}(U_i)$. Wtedy odwzorowania $Z_i \to U_i$ są dominujące, więc faktoryzują się jako: $Z_i \to \widetilde{U_i} \to U_i$ – to daje nam odwzorowania $Z_i \to \widetilde{U_i} \hookrightarrow \widetilde{X}$. Łatwo sprawdzić (z jednoznaczności faktoryzacji dla normalizacji U_{ij}), że odwzorowania te są zgodne na przecięciach $Z_i \cap Z_j$ – zadają więc morfizm $Z \to \widetilde{X}$.

2.3.10

(a) z dowodu Twierdzenia 3.3 wynika, że rodzina

$$\left\{U_1 \times_V U_2 = Spec(B_1 \otimes_A B_2) : U_i = Spec(B_i) \text{ – otwarty w } X_i, \quad V = Spec(A) \text{ – otwarty w } Y, \quad f_i(U_i) \subset V\right\}$$

jest bazą topologii w $X_1 \times_Y X_2$.
Wybierzmy dowolną afiniczną bazę topologii $(V_i)_i$ na Y oraz dowolną afiniczną bazę topologii $(U_j)_j$ na X, spełniającą $f(U_j) \subset V_{i(j)}$ (jest to możliwe z ciągłości f).
Jeżeli $U = Spec(B) \subset X$, $V = Spec(A) \subset Y$ oraz y odpowiada ideałowi $\mathfrak{p} \in V$ to:

$$U \times_V Spec(k(y)) = Spec(B) \times_{Spec(A)} Spec(k(y)) = Spec(B \otimes_A k(y)) = Spec(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) =$$

$$= \{\mathfrak{q} \in Spec(B) : f(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\} = U \cap f^{-1}(\mathfrak{p})$$

– stąd $U_i \cap f^{-1}(\mathfrak{p})$ jest bazą topologii na X_y, więc topologia ta jest identyczna z topologią podprzestrzeni na $f^{-1}(y)$.

(b) Niech $k[s,t]/(s-t^2) = k[\overline{s},\overline{t}]$, $\mathfrak{p} = (s - s_0) \in Spec(k[s])$. Mamy izomorfizm:

$$k[\overline{s},\overline{t}]_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}k[\overline{s},\overline{t}]_\mathfrak{p} \cong k[t]/(t^2 - s_0) = k[t]/((t-\sqrt{s_0})(t+\sqrt{s_0}) \cong \begin{cases} k \oplus k, & s_0 \neq 0 \\ k[t]/(t^2), & s_0 = 0 \end{cases}$$

– pierwszy izomorfizm dany jest przez $f(\overline{s},\overline{t}) \mapsto f(s_0,\overline{t})$, zaś drugi wynika z Chińskiego Twierdzenia o Resztach. Stąd:

$$X_\mathfrak{p} = Spec(k[\overline{s},\overline{t}]_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}k[\overline{s},\overline{t}]_\mathfrak{p}) = \begin{cases} Spec(k \oplus k), & s_0 \neq 0 \\ Spec(k[t]/(t^2)), & s_0 = 0 \end{cases}$$

Stąd już widać, że X_y składa się z dwóch punktów o ciałach reszt k, jeżeli y odpowiada punktowi $s_0 \in k^*$ oraz z jednego punktu o niezredukowanym schemacie dla y odpowiadającego $0 \in k$.
Niech η będzie punktem generycznym Y, wtedy:

$$X_\eta = Spec(k[\overline{s},\overline{t}]_\eta/\eta\, k[\overline{s},\overline{t}]_\eta) = Spec(Frac(k[\overline{s},\overline{t}])) = Spec(k(s)(\sqrt{s}))$$

zaś rozszerzenie $k(s)(\sqrt{s})/k(s)$ jest kwadratowe.

2.3.13

(a) Niech $f : X \to Y$ – domknięta immersja, zaś $Spec(A) = U \subset Y$ będzie otwartym podzbiorem afinicznym. Z założenia $f : sp(X) \to sp(Y)$ jest homeomorfizmem na domknięty podzbiór $Z \subset Y$. Wtedy $f : f^{-1}(U) \to U$ jest domkniętą immersją (jej obraz „topologiczny” to $U \cap Z$) w schemat afiniczny, więc z zadania 3.11 (b): $f^{-1}(U) \cong Spec(A/I)$ dla pewnego I. Wystarczy zauważyć, że A/I jest skończenie generowaną A-algebrą (generatorem jest 1).

(b) Niech $f : X \to Y$ – quasizwarta i otwarta immersja. Bez straty ogólności możemy założyć, że $X \subset Y$ jest otwartym podzbiorem. Wtedy możemy pokryć X schematami afinicznymi: (są one bazą topologii na y) $X = \bigcup_i Spec(A_i)$, zaś z quasizwartości można założyć, że to pokrycie jest skończone. Z tego oczywiście wynika teza.

(c) Niech $f : X \to Y, g : Y \to Z$ – morfizmy sk. typu, $U = Spec(A) \subset Z$. Wtedy: $g^{-1}(Z) = \bigcup_{i=1}^n W_i, W_i = Spec(B_i)$ oraz B_i jest A-algebrą sk. typu. Ponadto $f^{-1}(W_i) = \bigcup_{j=1}^{n_i} V_{ij}$, gdzie $V_{ij} = Spec(C_{ij})$, zaś C_{ij} jest B_i-algebrą sk. typu. Stąd: $(f \circ g)^{-1}(U) = \bigcup_{i,j} V_{ij}$ i pozostaje zauważyć, że C_{ij} jest A-algebrą sk. typu (złożenie homomorfizmów skończonego typu jest skończonego typu).

(d) Niech $f : X \to Y$ – skończonego typu, $g : Y' \to Y$ - dany morfizm, $X' := X \times_Y Y'$, $f' : X' \to Y'$. Z założenia istnieje pokrycie $Y = \bigcup_i Spec(A_i)$ takie, że $f^{-1}(Spec(A_i)) = \bigcup_{j=1}^{n_i} Spec(B_{ij})$ oraz B_{ij} jest A_i-algebrą skończonego typu. Niech $g^{-1}(Spec(A_i)) = \bigcup_k Spec(C_{ik})$ (wtedy $Y' = \bigcup_{i,k} Spec(C_{ik})$). Wtedy: $X' = \bigcup_{i,j,k} Spec(B_{ij} \otimes_{A_i} C_{ik})$ oraz $f'^{-1}(Spec(C_{ik})) = \bigcup_{j=1}^{n_i} Spec(B_{ij} \otimes_{A_i} C_{ik})$. Pozostaje zauważyć, że $B_{ij} \otimes_{A_i} C_{ik}$ jest C_{ik}-algebrą skończonego typu (generują ją te same elementy co B_{ij} nad A_i).

(e) Niech $f : X \to S$, $g : X \to S$, $h : X \times_S Y \to S$ oraz $U = Spec(A) \subset S$, $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^m X_i$, $g^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n Y_i$, gdzie $X_i = Spec(A_i)$, $Y_i = Spec(B_j)$ pochodzą od A-algebr sk. typu. Wtedy $h^{-1}(U) = \bigcup_{i,j} X_i \times_U Y_j$, gdzie $X_i \times_U Y_j = Spec(A_i \otimes_A B_j)$ – pozostaje zauważyć, że iloczyn tensorowy algebr sk. typu jest sk. typu.

(f) Pokryjmy Z zbiorami afinicznymi postaci $U = Spec(A)$ i ustalmy jeden z nich. Rozważmy pokrycie afiniczne: $g^{-1}(U) = \bigcup_i Spec(B_i)$ oraz pokrycie afiniczne: $f^{-1}(Spec(B_i)) = \bigcup_{j=1}^{n_i} Spec(C_{ij})$ (można je dobrać tak, by było skończone z quasizwartości f). Odwzorowanie $Spec(C_{ij}) \to Spec(B_i) \to Spec(A)$ jest indukowane przez homomorfizm $A \to B_i \to C_{ij}$. Ale $Spec(C_{ij}) \subset f^{-1}(g^{-1}(U))$, więc z zadania 3.3 (c) C_{ij} jest A-algebrą skończonego typu. Stąd C_{ij} musi być również B_i-algebrą skończonego typu (wystarczy wybrać elementy generujące C_{ij} jako A–algebrę). Zbiory B_{ij} dla wszystkich możliwych U tworzą pokrycie Y, co kończy dowód.

(g) Niech $Y = \bigcup_i Y_i$, $Y_i = Spec(A_i)$ będzie skończonym pokryciem, pochodzącym od pierścieni Noether. Wtedy $f^{-1}(Y_i) = \bigcup_j X_{ij}$, gdzie $X_{ij} = Spec(B_{ij})$ pochodzi od A_i-algebry sk. typu, czyli od pierścienia Noether (tw. Hilberta o bazie). Stąd $(X_{ij})_{i,j}$ jest skończonym pokryciem X pochodzącym od pierścieni Noether.

2.3.14

Lemat (słabe twierdzenie Hilberta o zerach w wersji dla dowolnego ciała)
Niech X będzie schematem skończonego typu nad ciałem k. Wtedy punkt $x \in X$ jest domknięty wtw. $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ jest algebraicznym rozszerzeniem k.
Dowód: Wykażemy najpierw, że jeżeli B jest algebrą skończonego typu nad ciałem k, to ideał $\mathfrak{p} \in Spec(B)$ jest maksymalny wtw. gdy $\kappa(\mathfrak{p})/k$ jest skończonym rozszerzeniem ciał. Istotnie, ideał $\mathfrak{p}$ jest maksymalny wtw. gdy $ht(\mathfrak{p}) = \dim R$ wtw. gdy $trdeg_k(Frac(B/\mathfrak{m})) = dim(B/\mathfrak{m}) = \dim B - ht(\mathfrak{p}) = 0$ wtw. gdy $\kappa(\mathfrak{p}) = Frac(B/\mathfrak{m})$ jest algebraicznym i skończenie generowanym rozszerzeniem k wtw. gdy $\kappa(\mathfrak{p})/k$ jest skończonym rozszerzeniem ciał.
Niech teraz X będzie dowolnym schematem skończonego typu nad ciałem k, zaś U_i – pokryciem otwartym afinicznym X. Powyżej udowodniliśmy, że jeżeli $[\kappa(x) : k] < \infty$, to x jest domknięty w każdym U_i, więc:

$$cl_X(P) = \bigcup_i cl_X(P) \cap U_i = \bigcup_i cl_{U_i}(P) = \{P\}$$

Jeżeli zaś x jest domknięty w X, to jest domknięty w każdym U_i, więc znowu wystarczy skorzystać z tego, co udowodniliśmy wyżej.

Dla schematu afinicznego: niech $A = R/I$ będzie algebrą skończonego typu nad k, gdzie $R := k[x_1, \ldots, x_n]$. Niech $M \subset Spec(A)$ będzie zbiorem punktów domkniętych (czyli ideałów maksymalnych). Aby pokazać, że $\overline{M} = Spec(A)$, wystarczy dowieść, że $M \cap U \neq \varnothing$ dla każdego zbioru $U = D_A(f) \neq \varnothing$ z bazy topologii. Równoważnie, trzeba pokazać, że o ile $f \notin \sqrt{I}$, to $D_R(f) \cap V_R(I) \neq \varnothing$. Zauważmy, że $D_R(f) \cap V_R(I) = Spec((R/I)_{\overline{f}})$. Oznaczmy $R' := (R/I)_{\overline{f}}$. Niech $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ odpowiada dowolnemu ideałowi maksymalnemu w R'; chcemy wykazać, że $\mathfrak{m}$ jest maksymalny również w R.

Z powyższego lematu $\kappa_{R'}(\mathfrak{m}) = R'/\mathfrak{m}R'$ jest skończonym rozszerzeniem k, więc $\kappa_R(\mathfrak{m}) = Frac(R/\mathfrak{m}) \cong R'/\mathfrak{m}R' = \kappa_{R'}(\mathfrak{m})$ również. Korzystając ponownie z lematu, oznacza to, że $\mathfrak{m}$ jest ideałem maksymalnym w R.

Ogólny przypadek: Niech M będzie zbiorem punktów domkniętych na schemacie X (skończonego typu nad ciałem k), zaś U_i – pokryciem otwartym afinicznym X. Zauważmy, że z powyższego lematu, jeżeli $x \in X$ jest domknięty w pewnym zbiorze U_i, to $[\kappa(x) : k] < \infty$ oraz jest domknięty w X. Ale punktu domknięte są gęste w U_i, co kończy dowód.

Kontrprzykład: niech R będzie pierścieniem dyskretnej waluacji – wtedy $Spec(R) = \{(0), \mathfrak{m}\}$ oraz $\overline{\{\mathfrak{m}\}} = \mathfrak{m}$, więc zbiór punktów domkniętych nie jest gęsty w $Spec(R)$.

2.3.15

(zakładamy, że chodzi o skończone rozszerzenia K/k – dyskusja na:
http://math.stackexchange.com/questions/46176/transcendental-base-extension)

(a) **Dowód dla X – afinicznego:** niech $X = Spec(A)$, gdzie $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ jest k-algebrą sk. typu. Będziemy stosowali oznaczenie: $I_K := I\, K[x_1, \ldots, x_n]$.
Zauważmy najpierw, że $I_{\overline{k}} = \bigcup_{K/k} I_K$ oraz $\sqrt{I_{\overline{k}}} = \bigcup_{K/k} \sqrt{I_K}$ (suma po skończonych rozszerzeniach K/k). Istotnie, jeżeli np. $f \in \sqrt{I_{\overline{k}}}$, $f^n = \sum_j g_j h_j$ dla $g_j \in \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$, $h_j \in I$, to biorąc K/k takie, że $g_j \in K[x_1, \ldots, x_n]$, dostajemy: $f \in I_K$.

Schemat afiniczny jest nierozkładalny wtw. gdy ma dokł. 1 ideał pierwszy, tzn. wtw. gdy jego nilradykał jest ideałem pierwszym. Stąd:

- $(i) \Rightarrow (iii)$: jeżeli $X \times_k \overline{k} = Spec(\overline{k}[x_1, \ldots, x_n]/I_{\overline{k}})$ jest nierozkładalny, to ideał $\sqrt{I_{\overline{k}}} \trianglelefteq \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ jest pierwszy. Wtedy również ideał $\sqrt{I_K} \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ jest pierwszy dla każdego algebraicznego rozszerzenia K/k (a więc $X \times_k K$ jest nierozkładalny). Istotnie, jeżeli $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $fg \in \sqrt{I_K}$, to $fg \in \sqrt{I_{\overline{k}}}$, więc (bez straty ogólności) $f \in \sqrt{I_{\overline{k}}} \cap K[x_1, \ldots, x_n] \subset \sqrt{I_K}$.
- $(iii) \Rightarrow (ii)$: podobnie jak powyżej – jeżeli ideał $\sqrt{I_K} \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ jest pierwszy dla każdego K/k, to $\sqrt{I_{k_s}} \trianglelefteq k_s[x_1, \ldots, x_n]$ jest pierwszy. Istotnie, jeżeli $fg \in \sqrt{I_{k_s}}$, to biorąc K takie, że $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$, dostajemy $fg \in \sqrt{I_K}$, więc (bez straty ogólności) $f \in \sqrt{I_K}$, więc $f \in \sqrt{I_{k_s}}$,
- $(ii) \Rightarrow (i)$: załóżmy, że ideał $\sqrt{I_{k_s}} \trianglelefteq k_s[x_1, \ldots, x_n]$ jest pierwszy. Pokażemy że $\sqrt{I_{\overline{k}}} \trianglelefteq \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ jest pierwszy. Istotnie, niech $p = char\, k$. Wybierzmy $f, g \in \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ – wtedy dla pewnego m (dostatecznie dużego) $f^{p^m}, g^{p^m} \in k_s[x_1, \ldots, x_n]$. Stąd, jeżeli $fg \in \sqrt{I_{\overline{k}}}$, to $f^{p^m} g^{p^m} \in \sqrt{I_{k_s}}$, więc $f^{p^m} \in \sqrt{I_{k_s}} \subset \sqrt{I_{\overline{k}}}$, więc $f \in \sqrt{I_{k_s}}$.

Dowód w ogólnym przypadku:

Lemat 1 Schemat X o pokryciu otwartym $X = \bigcup_i U_i$ jest nierozkładalny wtw. gdy $\forall_i \quad U_i$ jest nierozkładalny oraz $\forall_{i,j} \quad U_i \cap U_j \neq \varnothing$.
Dowód: $(\Leftarrow)$ Niech η_i będzie (jedynym) punktem generycznym U_i (schematy są przestrzeniami "trzeźwymi"). Wystarczy pokazać, że $\eta_i = \eta_j$ dla każdego i, j – wtedy $cl_X(\{\eta_i\}) = \bigcup_j cl_{U_j}(\{\eta_i\}) = \bigcup_j U_j = X$, więc X będzie nierozkładalny. Zbiór $U_i \cap U_j$ jest niepustym podzbiorem otwartym U_j, więc musi zawierać punkt generyczny η_j. Wtedy $U_j \subset cl_X(\{\eta_j\})$, więc $U_i \cap U_j \subset \overline{\{\eta_j\}} \cap U_i$, więc $cl_{U_i}(U_i \cap U_j) \subset cl_{U_i}(\{\eta_j\})$. Ale U_i jest nierozkładalny, więc każdy jego niepusty podzbiór otwarty jest gęsty oraz $cl_{U_i}(U_i \cap U_j) = U_i$. Stąd η_j jest generycznym punktem U_i, więc z jednoznaczności $\eta_i = \eta_j$.
$(\Rightarrow)$ oczywiste. □

Lemat 2 Jeżeli Y jest k-schematem oraz K/k – rozszerzeniem ciał, to $Y \times_k K = \varnothing$ wtw. gdy $Y = \varnothing$.
Dowód: załóżmy nie wprost, że $Y \times_k K = \varnothing$ oraz $Spec(A)$ jest niepustym otwartym podzbiorem Y – wtedy $Spec(A \otimes_k K) = \varnothing$, czyli $A \otimes_k K = 0$, więc $0 = \dim_k(A \otimes_k K) = \dim_k(A) \cdot \dim_k(K)$, czyli $\dim_k(A) = 0$ oraz $A = 0$. Sprzeczność kończy dowód.

Niech $X = \bigcup_i U_i$, gdzie $U_i = Spec(A_i)$. Wtedy $X \times_k K = \bigcup_i U_i \times_k K = \bigcup_i Spec(A_i \otimes_k K)$ oraz z pierwszej części: $U_i \times_k \overline{k}$ jest nierozkładalne wtw. gdy $U_i \times_k k_s$ jest nierozkładalne, wtw. gdy $\forall_{K/k} \quad U_i \times_k K$ jest nierozkładalne. Ponadto (podstawiając w Lemacie 2: $Y = U_i \cap U_j$): $(U_i \times_k \overline{k}) \cap (U_j \times_k \overline{k}) = (U_i \cap U_j) \times_k \overline{k} = \varnothing$ wtw. gdy $(U_i \times_k k_s) \cap (U_j \times_k k_s) = (U_i \cap U_j) \times_k k_s = \varnothing$ wtw. gdy $(U_i \times_k K) \cap (U_j \times_k K) = (U_i \cap U_j) \times_k K = \varnothing$ (czyli wtw. gdy $U_i \cap U_j = \varnothing$).

(b) zredukowaność jest własnością lokalną, więc bez straty ogólności: $X = Spec(A)$, gdzie $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$. Oznaczmy: $I_K := I \cdot K[x_1, \ldots, x_n]$. $X \times_k K$ jest zredukowane wtw. gdy $I_K = \sqrt{I_K}$, więc wystarczy (podobnie jak powyżej) dowieść, że

$$I_{\overline{k}} = \sqrt{I_{\overline{k}}} \quad \Leftrightarrow \quad I_{k_p} = \sqrt{I_{k_p}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{K/k}\, I_K = \sqrt{I_K}$$

2.3.16 Zauważmy najpierw, że przestrzeń topologiczna jest noetherowska wtw. gdy każda niepusta rodzina zbiorów domkniętych ma element minimalny wg inkluzji. Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną domkniętych podzbiorów X bez własności $\mathcal{P}$ i załóżmy nie wprost, że $\mathcal{R} \neq \varnothing$. Niech $M \in \mathcal{R}$ będzie elementem minimalnym – wtedy każdy właściwy podzbiór domknięty X ma własność $\mathcal{P}$, więc z założenia M ma własność $\mathcal{P}$. Sprzeczność oznacza, że $\mathcal{R} = \varnothing$ – w szczególności X ma własność $\mathcal{P}$.

2.3.18

(a) niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną skończonych sum zbiorów lokalnie domkniętych w X; pokażemy, że $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Istotnie, $\mathcal{G}$ spełnia własności (1) – (3), więc $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Z drugiej strony, z warunków (1)&(3) wynika, że zbiory domknięte (czyli dopełnienia zbiorów otwartych) należą do $\mathcal{F}$. Z warunków (2)&(3) wynika, że skończone sumy zbiorów z $\mathcal{F}$ należą do $\mathcal{F}$. Stąd skończone sumy zbiorów lokalnie domkniętych w X należą do X, więc $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

(b) załóżmy, że zbiór $K = \bigcup_{i=1}^n D_i \cap U_i$ (gdzie D_i – domknięty, U_i – otwarty) jest gęsty w X. Wtedy: $X = \overline{K} = \overline{\bigcup_{i=1}^n D_i \cap U_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{D_i \cap U_i}$, więc z nierozkładalności X istnieje j takie, że $\overline{D_j \cap U_j} = X$. Stąd: $X = \overline{D_j \cap U_j} \subset D_j$, więc $D_j = X$. Stąd $U_j = D_j \cap U_j \subset K$, a ponadto U_j zawiera punkt generyczny X (każdy podzbiór otwarty w X zawiera punkt generyczny). Druga implikacja jest oczywista.

(c) domknięty zbiór jest oczywiście konstruowalny i zamknięty wg specjalizacji. Załóżmy, że konstruowalny zbiór $K = \bigcup_{i=1}^n D_i \cap U_i$ jest zamknięty wg specjalizacji. Wystarczy wykazać, że punkty generyczne wszystkich składowych nierozkładalności $\overline{K}$ należą do K. Istotnie, jeżeli wtedy $y \in \overline{K}$, to $y \in \overline{\{\eta\}}$ dla pewnej składowej nierozkładalności $\overline{\{\eta\}}$ zbioru K, więc $\eta \in K$ oraz (z zamkniętości na specjalizacje) $y \in K$.
Niech C będzie dowolną składową nierozkładalności K. Wtedy zbiór $C \cap K$ jest konstruowalny i gęsty w K. Istotnie, mamy: $C = C \cap \overline{K} = \bigcup_{i=1}^n C \cap \overline{D_i \cap U_i}$, więc z nierozkładalności: $C = C \cap \overline{D_i \cap U_i}$, czyli $C \subset \overline{D_i \cap U_i} \subset D_i$ dla pewnego i. Ale zbiór $U_i \cap D_i$ jest niepusty i otwarty, a więc gęsty w C. Stąd: $\overline{C \cap K} \supset \overline{U_i \cap D_i} \supset \overline{C \cap U_i} = C$, czyli $\overline{C \cap K} = C$. Konstruowalność jest oczywista. Stąd, z podpunktu (b), K zawiera generyczny punkt zbioru C. To kończy dowód.

(d) jeżeli $K = \bigcup_{i=1}^n D_i \cap U_i \subset Y$ jest konstruowalny, to $f^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(D_i) \cap f^{-1}(U_i)$ również (przeciwobraz zbioru otwartego/ domkniętego przez funkcję ciągłą jest otwarty/domknięty).

2.3.19

(a)
1. Wystarczy pokazać, że $f(X)$ jest konstruowalne w Y.

   D: jeżeli $K = \bigcup_{i=1}^n D_i \cap U_i$ jest konstruowalny w Y, to wystarczy pokazać, że $f(D_i \cap U_i)$ jest konstruowalny dla każdego i. Immersja $D_i \cap U_i \hookrightarrow X$ (gdzie na $D_i \cap U_i$ rozważamy np. zredukowaną strukturę schematu) jest złożeniem quasizwartej otwartej immersji oraz domkniętej immersji, więc jest skończonego typu.
2. Bez straty ogólności $X = Spec(B)$, $Y = Spec(A)$ są nierozkładalnymi schematami afinicznymi:

   D: Niech $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$, $Y_i = Spec(A_i)$ będzie skończonym pokryciem nierozkładalnymi otwartymi zbiorami afinicznymi. Wtedy, jeżeli dla każdego i zbiór $f(X) \cap Y_i$ jest konstruowalny, to $f(X) = \bigcup_i f(X) \cap Y_i$ jest konstruowalny. Stąd, zamieniając X na $f^{-1}(Y_i)$ oraz Y na Y_i, możemy założyć, że Y jest afiniczne.
   Niech $X = \bigcup_{j=1}^m X_j$, $Y_i = Spec(A_i)$ będzie skończonym pokryciem nierozkładalnymi otwartymi zbiorami afinicznymi. Wystarczy wykazać, że dla każdego j zbiór $f(X_j)$ jest konstruowalny, bo wtedy zbiór $f(X) = \bigcup_j f(X_j)$ jest konstruowalny. Stąd bez straty ogólności można zamienić X na X_j.
3. Bez straty ogólności X, Y są zredukowane (z poprzedniego punktu są nierozkładalne, więc są całkowite).

   D: morfizm $X_{red} \to X \to Y$ jest skończonego typu i faktoryzuje się przez morfizm $X_{red} \to Y_{red}$. Ponadto X_{red}, Y_{red} są homeomorficzne z X, Y oraz są nadal afiniczne.
4. Bez straty ogólności $\overline{f(X)} = Y$ (zastępując Y przez $\overline{f(X)}$ ze zredukowaną strukturą).

(b) udowodnimy najpierw:

Lemat (o przedłużaniu homomorfizmów) [AM, Stwierdzenie 5.23]
Niech $A \subset B$ będą dziedzinami całkowitości i niech B będzie A-algebrą skończonego typu. Ustalmy $b \in B$. Wtedy istnieje $a \in A$ takie, że dla dowolnego homomorfizmu $\varphi : A \to K$ (gdzie K – ciało algebraicznie domknięte) takiego, że $\varphi(a) \neq 0$, istnieje jego przedłużenie $\varphi' : B \to K$ takie, że $\varphi'(b) \neq 0$.
Dowód: Przez indukcję można założyć, że $B = A[t]$ jest generowane przez jeden element, niech $b = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i$. Rozważmy dwa przypadki:

- t jest przestępny nad A (tzn. nie spełnia żadnego wielomianu o współczynnikach w A),

  Wtedy wystarczy przyjąć $a := a_i$ dla dowolnego niezerowego a_i. Istotnie, jeżeli mamy dany homomorfizm $\varphi : A \to K$, to za $\varphi'(t)$ trzeba przyjąć dowolną liczbę, niebędącą pierwiastkiem wielomianu $\sum_i \varphi(a_i)X^i$ – wtedy $\varphi'(b) = \sum_i \varphi(a_i)\varphi'(t)^i \neq 0$,
- t spełnia pewien wielomian o współczynnikach w A $\sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ (zakładamy, że jest to wielomian minimalnego stopnia spełniany przez t). $\sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ (zakładamy, że jest to wielomian minimalnego stopnia spełniany przez b). Niech $A' = A[c_n^{-1}]$, $B' = B[c_n^{-1}]$, $c_i' = c_n^{-1} \cdot c_i$. Wybierzmy dowolne $c_i \neq 0$ takie, że $i < n$ oraz niech $a := c_i \cdot c_n$. Niech $\varphi : A \to K$, $\varphi(a) \neq 0$. Wtedy $\varphi(c_n) \neq 0$, więc możemy przedłużyć φ na A'. Zauważmy, że $A'[b] \cong A'[X]/(\sum_i c_i' X^i)$. Stąd, aby przedłużyć φ na $A'[b]$ wystarczy za $\varphi'(b)$ przyjąć dowolny niezerowy pierwiastek wielomianu $\sum_i \varphi'(c_i')X^i$.

Niech $f : X \to Y$ będzie dominującym morfizmem skończonego typu między schematami afinicznymi $X = Spec(B)$, $Y = Spec(A)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że pochodzi on od inkluzji $A \subset B$. Przyjmijmy w lemacie $b = 1$ i niech $a \in A$ będzie odpowiadającym elementem. Wykażemy, że $D(a) \subset f(X)$. Istotnie, załóżmy, że $a \notin \mathfrak{p}$ oraz niech $\varphi : A \to K$, gdzie $K = \overline{Frac(A/\mathfrak{p})}$. Wtedy $\varphi(a) \neq 0$, więc z lematu możemy to odwzorowanie przedłużyć do $\varphi' : B \to K$, spełniającego $\varphi'(1) \neq 0$. Niech $\eta = \ker \varphi'$ – wtedy jest to ideał pierwszy (obrazem φ' jest dziedzina całkowitości), a ponadto $\eta \cap A = \ker \varphi = \mathfrak{p}$, czyli $\mathfrak{p} = f(\eta) \in f(X)$.

(c) zauważmy najpierw, że jeżeli $Z \subset Y$ jest domkniętym nierozkładalnym podzbiorem Y oraz $f(X) \cap Z \neq \varnothing$, to zbiór $f(X) \cap Z$ zawiera niepusty zbiór otwarty w Z: $Z \cap U \subset f(X) \cap Z$. Istotnie, jeżeli $Z = V(\mathfrak{p})$, $f(\mathfrak{q}) \in f(X) \cap Z$ to możemy skorzystać z (b) dla inkluzji $A/\mathfrak{p} \subset B/\mathfrak{q}$.

Rozważmy zbiory domknięte $D \subset Y$ o następującej własności $\mathcal{P}$: $f(X) \cap D$ jest zbiorem konstruowalnym. Z zadania 2.3.16 wystarczy wykazać, że jeżeli każdy domknięty podzbiór właściwy zbioru D ma własność $\mathcal{P}$, to D ma tę własność. Jeżeli D nie jest nierozkładalny oraz $D = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ jest rozkładem na składowe nierozkładalne, to C_i mają własność $\mathcal{P}$, więc $f(X) \cap D = (f(X) \cap C_1) \cup \ldots \cup (f(X) \cap C_n)$ jest zbiorem konstruowalnym. Załóżmy teraz, że D jest zbiorem nierozkładalnym. Niech $G = \overline{f(X) \cap D}$. Jeżeli $G \neq D$, to z założenia indukcyjnego $f(X) \cap G$ jest konstruowalny. Ale:

$$G \subset D \quad \Rightarrow \quad f(X) \cap G \subset f(X) \cap D, \qquad G \supset f(X) \cap D \quad \Rightarrow \quad f(X) \cap G \supset f(X) \cap f(X) \cap D$$

czyli $f(X) \cap D = f(X) \cap D$ jest konstruowalny.
Jeżeli $G = D$, czyli $\overline{f(X) \cap D} = f(X) \cap D$, to z podpunktu (b) stwierdzamy, że $\varnothing \neq U \cap D \subset f(X) \cap D$ dla pewnego zbioru otwartego U. Stąd: $f(X) \cap D = (U \cap D) \cup (f(X) \cap U' \cap D)$ (gdzie $U' = D \backslash U$). Ale $U' \cap D$ ma własność $\mathcal{P}$, więc $f(X) \cap U' \cap D$ jest konstruowalny.

2.3.20

(a) Niech $X = \bigcup_i X_i$, $X_i = Spec(A_i)$ będzie pokryciem afinicznym X. Wtedy, z zadania I.1.10(b) mamy: $\dim X = \sup_i \dim U_i$. Ponadto, z zadania I.3.12: $\dim U_i = \dim \mathcal{O}_P$ dla dowolnego domkniętego punktu $P \in U_i$. Ponadto dla dowolnych i, j: $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ (bo X jest całkowity, a więc nierozkładalny). Biorąc dowolny punkt domknięty $Q \in U_i \cap U_j$ (punkty domknięte są gęste w dowolnym zbiorze otwartym – zadanie II.3.14) dostajemy: $\dim U_i = \dim \mathcal{O}_Q = \dim U_j$, więc dla dowolnego i: $\dim X = \dim U_i$ oraz teza wynika ze wcześniejszych spostrzeżeń.

(b) jeżeli $U = Spec(A) \subset X$ jest dowolnym afinicznym podzbiorem, to z (a) oraz z zadania 3.6: $\dim X = \dim U = \dim A = trdeg_k(Frac(A)) = trdeg_k(K(X))$.

(c) niech $\{Y_i\}_i$ będą składowymi nierozkładalności Y – wtedy $codim(Y, X) = \inf_i codim(Y_i, X)$, więc bez straty ogólności możemy założyć, że Y jest nierozkładalne. Zauważmy, że dla dowolnego zbioru otwartego U spełniającego $U \cap Y \neq \varnothing$ mamy: $codim(Y, X) = codim(Y \cap U, U)$ – istotnie, $T \mapsto \overline{T}$ ustala bijekcję między nierozkładalnymi podzbiorami U oraz nierozkładalnymi podzbiorami X o niepustym przecięciu z U. Pokryjmy więc Y otwartymi zbiorami afinicznymi i wybierzmy dowolny z nich: $U = Spec(A)$ (taki, że $U \cap Y \neq \varnothing$).
Każdy ideał pierwszy $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ odpowiada pewnej podrozmaitości $Z = V(\mathfrak{p})$. Stąd:

$$\dim A_{\mathfrak{q}} = \sup\{n : 0 = \mathfrak{p}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}, \text{gdzie } \mathfrak{p}_i \in Spec(A)\} =$$

$$= \sup\{n : V(\mathfrak{q}) = Y_n \subset Y_{n-1} \subset \ldots \subset Y_0 = Spec(A)\} = codim(V(\mathfrak{q}), Spec(A))$$

czyli

$$\inf_{P \in Y \cap U} \dim \mathcal{O}_P = \inf_{Y \cap U \subset Z \subset X} codim(Z, U) = codim(Y \cap U, U)$$

(gdzie drugie infinium braliśmy po wszystkich nierozkładalnych domkniętych podzbiorach U, zawierających $Y \cap U$). Równość jest zrealizowana dla P – punktu generycznego Y.

(d) wystarczy udowodnić tą równość w przypadku, gdy Y jest nierozkładalne – wtedy, jeżeli $\{Y_i\}_i$ są nierozkładalnymi składowymi Y, dostajemy:

$$\dim Y + codim(Y, X) = \sup_i \dim Y_i + \inf_i codim(Y_i, X) = \sup_i \dim Y_i + \inf_i(\dim X - \dim Y_i) =$$

$$= \sup_i \dim Y_i + (\dim X - \sup_i \dim Y_i) = \dim X$$

Założmy więc, że Y jest nierozkładalne. Niech $U = Spec(A)$ będzie dowolnym podzbiorem afinicznym X takim, że $Y \cap U \neq \varnothing$. Wtedy $\dim(Y) = \dim(Y \cap U)$ oraz $codim(Y, X) = codim(Y \cap U, U)$. Ponadto, jeżeli $\eta \in U$ jest punktem generycznym Y, to: $\mathcal{O}_\eta = A_\eta$, $\mathfrak{m}_\eta = \eta A_\eta$, $K(Y) = \mathcal{O}_\eta/\mathfrak{m}_\eta = A_\eta/\eta A_\eta \cong Frac(A/\eta)$. Stąd $\dim Y = trdim K(Y) = dim(A/\eta)$ oraz $codim(Y, X) = \dim \mathcal{O}_\eta = \dim A_\eta = ht(\eta)$, zaś z Tw. I.1.8A (b): $\dim(A/\eta) + ht(\eta) = \dim A = \dim X$.

(e) zauważmy, że dla dowolnego domkniętego punktu $P \in U$ mamy: $\dim U = \dim \mathcal{O}_P = \dim X$ (źdźbła na X oraz na U są takie same).

(f) niech $f : X' \to X$ będzie kanonicznym odwzorowaniem. Niech $U = Spec(A) \subset X$ będzie dowolnym otwartym zbiorem afinicznym – wtedy $\dim U = \dim X$ oraz $f^{-1}(Spec(A)) = Spec(A \otimes_k K)$. Zmieniając U możemy uzyskać niepusty przekrój $f^{-1}(U)$ z dowolną składową nierozkładalności X'. Zauważmy, że składowe nierozkładalności $Spec(A \otimes_k K)$ odpowiadają jednoznacznie minimalnym ideałom pierwszym w $A \otimes_k K$. Pozostaje nam wykazać:

Lemat Jeżeli A jest dziedziną całkowitości i algebrą skończonego typu nad ciałem k, to każdy minimalny ideał pierwszy w pierścieniu $A \otimes_k K$ ma wysokość $\dim A$.
Dowód: ?????????????????

2.3.22

(a) Z założenia $\eta = f(\xi)$ dla $\xi \in Z$. Wtedy z rozwiązania zadania 3.20 (c) wynika, że $codim(Y', Y) = \dim \mathcal{O}_\eta$ oraz $codim(Z, X) \leqslant \dim \mathcal{O}_\xi$. Niech $U = Spec(A)$ będzie otoczeniem afinicznym punktu η – wtedy $U \cap Y' \neq \varnothing$,

Analogicznie, zbiór $f^{-1}(U)$ jest otwarty, więc ξ ma otoczenie afiniczne $V = Spec(B)$ takie, że $V \subset f^{-1}(U)$. Z założenia A, B są algebrami skończonego typu nad k. Wtedy $f : U \to V$ odpowiada inkluzji $A \subset B$ (**lemat o dominujących odwzorowaniach całkowitych schematów**), zaś ξ, η odpowiadają ideałom pierwszym $\mathfrak{p} \in Spec(A), \mathfrak{q} \in Spec(B)$, $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Wtedy: $dim(\mathcal{O}_\eta) =$????????????????????????????????

Mamy:

Podrozdział 2.4

2.4.2 Załóżmy, że $f|_U = g_U$ dla U takiego, że $\overline{U} = X$. Niech $h = (f, g) : X \to Y \times_S Y$ (przez (f, g) rozumiemy morfizm h taki, że $\pi_1 \circ h = f$, $\pi_2 \circ h = g$ – istnieje on z własności uniwersalności iloczynu włóknistego). Wtedy $h|_U = \Delta|_{f(U)} \circ f|_U$, zatem $h(U) \subset \Delta(f(U))$. Stąd:

$$h(X) = h(\overline{U}) \subset \overline{h(U)} \subset \overline{\Delta(f(U))} \subset \overline{\Delta(X)} = \Delta(X).$$

Pozostaje zauważyć, że $\pi_1|_{\Delta(X)} = \pi_2|_{\Delta(X)}$, zatem:

$$f = \pi_1 \circ h = \pi_1|_{\Delta(X)} \circ h = \pi_2|_{\Delta(X)} \circ h = \pi_2 \circ h = g.$$

2.4.3 Niech $S = Spec(A)$, $U = Spec(B)$, $V = Spec(C)$, $\pi_1 : X \times_S Y \to X$, $\pi_2 : X \times_S Y \to Y$.
Łatwo zauważyć, że $\pi_1|_{\Delta(X)\cap(U\times_A V)}$ (równe $\pi_2|_{\Delta(X)\cap(U\times_A V)}$) zapewnia izomorfizm $\Delta(X) \cap (U \times_S V) \cong U \cap V$. Zauważmy, że $U \times_S V \cong Spec(B \otimes_A C)$ jest schematem afinicznym. Z założenia X jest rozdzielone, zatem $\Delta(X)$ jest domknięty. Stąd $\Delta(X) \cap (U \times_S V)$ jest domkniętym podschematem schematu afinicznego $U \times_S V$, jest zatem schematem afinicznym z zadania II.3.11 (b).

2.4.6 Niech morfizm $f : Spec(B) \to Spec(A)$ (gdzie A, B – dziedziny całkowitości, skończenie generowane nad k) będzie właściwy. Wtedy odpowiada on homomorfizmowi $\varphi : A \to B$; musimy pokazać, że jest on skończony. Bez straty ogólności zastąpmy A przez $\varphi(A)$ – wtedy możemy założyć, że $A \subset B$. Niech $K = Frac(B)$, zaś $R \subset K$ będzie dowolnym pierścieniem waluacyjnym zawierającym A. Rozważmy diagram inkluzji:

$$\begin{tikzcd}
K & B \arrow[l, hook'] \arrow[dl, dashed] \\
R \arrow[u, hook] & A \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Z założenia o właściwości i z kryterium waluacyjnego (przetłumaczonego na kategorię pierścieni) istnieje dokładnie jeden morfizm $B \to R$ (oznaczony na diagramie przerywaną strzałką), komutujący z pozostałymi. Inkluzja $B \hookrightarrow K$ faktoryzuje się jako $B \to R \hookrightarrow K$, więc $B \to R$ również jest inkluzją, tzn. $B \subset R$.
Stąd $B \subset \bigcup_{A\subset R} R$ (gdzie przekrój brany jest po wszystkich podpierścieniach waluacyjnych R, zawierających A), czyli z twierdzenia 4.11A mamy: $B \subset A^{int}$. Stąd B jest całkowitą A-algebrą, a ponadto jest skończenie generowane (bo jest sk. generowaną algebrą nad k). Pozostaje zauważyć, że algebra całkowita oraz skończenie generowana jest skończona.

2.4.7

Ogólniejszy fakt: jeżeli G – skończona grupa działająca na rozdzielonym schemacie X oraz każda orbita G jest zawarta w pewnym otwartym afinicznym podschemacie, to schemat ilorazowy X/G istnieje.

Niech $G = \mathbb{Z}/2$. Przydatne fakty:

Lemat 1 [przypadek szczególny AM, zad. 5.13] Niech G działa na $\mathbb{C}$-algebrze B. Dla $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in Spec(B)$ mamy: $\mathfrak{p} \cap B^G = \mathfrak{q} \cap B^G$ wtw. gdy $\mathfrak{p} = \sigma(\mathfrak{q})$ lub $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.
(Grupa $G = \mathbb{Z}/2$ działa przechodnio na ideałach nad ustalonym ideałem pierwszym $\mathcal{P} \in Spec(B^G)$.)
Dowód: ($\Rightarrow$) jeżeli $\mathfrak{p} = \sigma(\mathfrak{q})$, to dla $a \in \mathfrak{q} \cap B^G$ mamy: $a = \phi(a) \in \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, więc $a \in \mathfrak{p} \cap B^G$. To daje inkluzję $\mathfrak{q} \cap B^G \subset \mathfrak{p} \cap B^G$, analogicznie dostajemy drugą.
($\Leftarrow$) niech $\mathfrak{p} \cap B^G = \mathfrak{q} \cap B^G$. Jeżeli $a \in \mathfrak{p}$, to $a \cdot \sigma(a) \in \mathfrak{p} \cap B^G = \mathfrak{q} \cap B^G$, więc $a \in \mathfrak{q}$ lub $\phi(a) \in \mathfrak{q}$, czyli $a \in \mathfrak{q} \cup \sigma(\mathfrak{q})$. Stąd $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \cup \sigma(\mathfrak{q})$, więc ([AM, Stw. 1.11 i)] - unikanie ideałów pierwszych) $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ lub $\mathfrak{p} \subset \sigma(\mathfrak{q})$. Analogicznie $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ lub $\mathfrak{q} \subset \sigma(\mathfrak{p})$. Załóżmy nie wprost, że np. $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ oraz $\mathfrak{q} \subset \sigma(\mathfrak{p})$. Wtedy:

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \subset \sigma(\mathfrak{p}) \subset \sigma(\mathfrak{q}) \subset \sigma^2(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$$

więc wszystkie te ideały są równe. To daje tezę.

Lemat 2 (przypadek szczególny [Silverman, lemat II.5.8.1])
Jeżeli B jest $\mathbb{C}$-algebrą, $G = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, to $B \cong B^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
Dowód: izomorfizmy są dane przez:

$$B^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \ni \qquad b \otimes z \mapsto z \cdot b \qquad \in B$$

$$B \ni \quad b \mapsto \quad \frac{b+\sigma(b)}{2} \otimes 1 \quad - \quad \frac{ib+\sigma(ib)}{2} \otimes i \quad \in B^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

(a) Dla dowolnego pierścienia A z działaniem $G := \mathbb{Z}/2$ zadanym przez inwolucję $\iota : A \to A$ oznaczymy $A^G := \{a \in A : \iota(a) = a\}$.

Istnienie G-niezmienniczego pokrycia X: wykażemy najpierw, że istnieje pokrycie otwarte afiniczne X zbiorami $U_i = Spec(B_i)$ takimi, że $\sigma(Spec(B_i)) = Spec(B_i)$.
Ustalmy $x_0 \in X$. Zgodnie z założeniem istnieje $U \subset X$, $U \cong Spec(A)$ takie, że $x_0, \sigma(x_0) \in U$. Zauważmy, że $\sigma(U) \cong Spec(A)$ (σ jest automorfizmem), więc z rozdzieloności oraz zadania 4.3 zbiór $V := U \cap \sigma(U)$ jest otwarty afiniczny: $V = Spec(B)$. Ponadto $x_0, \sigma(x_0) \in V$ oraz $\sigma(V) = \sigma(U) \cap \sigma^2(U) = \sigma(U) \cap U = V$. Stąd V jest otoczeniem x_0 spełniającym dany warunek.

Skonstruujemy X_0 na dwa sposoby, które są w oczywisty sposób równoważne po rozpisaniu definicji sklejenia schematów.

Istnienie X_0 – sposób I ("ilorazowy" – nie zależący od wybranego pokrycia G-niezmienniczego): zdefiniujmy X_0 w następujący sposób:

- przestrzeń topologiczna będzie dana ilorazowo: $sp(X_0) = sp(X)/\sim$, gdzie $x \sim x$ oraz $x \sim \sigma(x)$. Odwzorowanie ilorazowe oznaczymy przez $\pi : X \to X_0$.
- snop będzie zaś dany przez: $\mathcal{O}_{X_0}(U) := \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$ (zauważmy, że $\sigma^\# : \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U)) \to \sigma_*(\mathcal{O}_X)(\pi^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))$ jest inwolucją, zadającą działanie G na $\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))$)

Wykażemy, że dla dowolnego $\pi(x) \in X_0$ znajdziemy otoczenie afiniczne. Wykazaliśmy powyżej, że istnieje otoczenie $V = Spec(B)$ punktu x, spełniające $\sigma(V) \subset V$. Wtedy $\sigma : V \to V$ jest indukowane przez pewną inwolucję $\phi : B \to B$. Pozostaje zauważyć, że (korzystając z **lematu 1**)

$$\pi(V) = \quad Spec(B)/\sim \quad = \{\mathfrak{p} \cap B^G : \mathfrak{p} \in Spec(B)\} = Spec(B^G)$$

jest afinicznym otoczeniem punktu $\pi(x)$.

Istnienie X_0 – sposób II ("sklejanie"): Powyżej wykazaliśmy, że istnieje pokrycie X zbiorami $U_i = Spec(B_i)$ takimi, że $\sigma(Spec(B_i)) = Spec(B_i)$. Niech $U_i \cap U_j = Spec(C_{ij})$ (z rozdzieloności X zbiór ten jest afiniczny). Wtedy X_0 powstaje przez sklejenie schematów $Spec(B_i^G)$ wzdłuż zbiorów otwartych $Spec(C_{ij}^G)$.

Dowód równości $X = X_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$: niech X_0 będzie zdefiniowane jak w sposobie II. Wtedy z definicji $X_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ jest sklejeniem schematów $Spec(B_i^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \cong Spec(B_i) \cong U_i$ wzdłuż zbiorów otwartych $Spec(C_{ij}^G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \cong Spec(C_{ij}) = U_i \cap U_j$, więc $X_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = X$.

Jednoznaczność istnienia X_0: Załóżmy, że $X \cong X_1 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, gdzie X_1 jest schematem rozdzielonym skończonego typu nad $\mathbb{R}$ oraz że $\sigma = (id_{X_1}, \alpha : Spec(\mathbb{C}) \to Spec(\mathbb{C})) : X \to X$ jest inwolucją na X. Niech $(Spec(C_i))_i$ będzie dowolnym pokryciem afinicznym X_1, $U_{ij} = Spec(C_i) \cap Spec(C_j) = Spec(D_{ij})$ (z rozdzieloności przekrój schematów afinicznych jest afiniczny). Wtedy $(Spec(C_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))_i$ jest G-niezmienniczym pokryciem X, więc (ze **Sposobu II**) X_0 jest sklejeniem schematów $Spec((C_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^G) = Spec(C_i)$ wzdłuż $Spec((D_{ij} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^G) = Spec(D_{ij})$ (izomorfizm $(C_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^G \cong C_i$ wynika z tego, że $\sigma^\#$ odpowiada identyczności na C_i oraz sprzężeniu na $\mathbb{C}$) – z jednoznaczności "sklejenia" mamy więc $X_0 \cong X_1$.

(b) niech $X_0 = Spec(A)$ będzie afiniczny. Wtedy $X = X_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = Spec(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ jest również afiniczny.
Niech $X = Spec(B)$ będzie afiniczny. Wtedy z **lematu 2**: $X = Spec(B) = Spec(B^G) \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, więc z jednoznaczności istnienia X_0 mamy: $X_0 = Spec(B^G)$.

(c) załóżmy, że dany mamy morfizm $f_0 : X_0 \to Y_0$ – wtedy para $(f_0 : X_0 \to Y_0, id_{Spec(\mathbb{C})})$ wyznacza z warunku uniwersalności pewien morfizm $f : X_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to Y_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, który spełnia:

$$f \circ \sigma_X = (f_0, id_{Spec(\mathbb{C})}) \circ (id_{X_0}, \tau) = (f_0, \tau)$$

$$\sigma_Y \circ f = (id_{Y_0}, \tau) \circ (f_0, id_{Spec(\mathbb{C})}) = (f_0, \tau)$$

czyli $f \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ f$.

Na odwrót, załóżmy, że dany mamy morfizm $f : X \to Y$, spełniający ten warunek. Niech $\pi_X : X \to X_0$, $\pi_Y : Y \to Y_0$ będą kanonicznymi projekcjami, zaś $f' = \pi_Y \circ f : X \to Y_0$. Wtedy

$$f'(\sigma_X(x)) = \pi_Y(f(\sigma_X(x))) = \pi_Y(\sigma_Y(f(x))) = \pi_Y(f(x)) = f'(x)$$

więc f' indukuje morfizm przestrzeni topologicznych $f_0 : sp(X)/_\sim = sp(X_0) \to sp(Y_0)$.

Rozważmy homomorfizm pierścieni:

$$(f')^\#(U) : \mathcal{O}_{Y_0}(U) = \mathcal{O}_Y(\pi_Y^{-1}(U))^G \to f'_*(\mathcal{O}_X)(U)$$

Z tego, że $\sigma_X^\# \circ f^\# = f^\# \circ \sigma_Y^\#$ łatwo zobaczyć, że obraz $(f')^\#(U)$ jest zawarty w $\mathcal{O}_X(f'^{-1}(U))^G = (f_0)_*(\mathcal{O}_{X_0})(U)$, co pozwala na zdefiniowanie mofizmu snopów $f_0^\# : \mathcal{O}_{Y_0} \to (f_0)_*(\mathcal{O}_{X_0})$. Para $(f_0 : sp(X_0) \to sp(Y_0), f_0^\# : \mathcal{O}_{Y_0} \to (f_0)_*(\mathcal{O}_{X_0}))$ to wymagany morfizm schematów.

(d) znajdziemy najpierw wszystkie półliniowe inwolucje $\sigma : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ – każda z nich odpowiada pewnemu X_0. Zauważmy ponadto, że jeżeli inwolucje σ_1, σ_2 będą spełniały $\sigma_1 = \alpha \circ \sigma_2 \circ \alpha^{-1}$ dla $\alpha \in Aut_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x])$, to otrzymane schematy X_0 będą izomorficzne. Niech $S : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ będzie sprzężeniem zespolonym: $S(f(x)) = \overline{f}(x)$. Wtedy $\iota := S \circ \sigma = \sigma \circ S : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ jest $\mathbb{C}$-liniowe, jest więc wyznaczone jednoznacznie przez $\iota(x)$. Ale ι jest inwolucją, więc $\iota(x)$ musi być wielomianem stopnia 1; przeliczenie pokazuje, że $\iota(x) = x$ lub $\iota(x) = b - x$ dla $b \in \mathbb{R}$. Po prostym podstawieniu możemy założyć bez straty ogólności, że $\sigma = S$.

Stąd: $\mathbb{C}[x]^G = \{f \in \mathbb{C}[x] : S(f) = f\} = \mathbb{R}[x]$ oraz $X_0 = Spec(\mathbb{C}[x]^G) = Spec(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$.

(e) niech $S : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ będzie "kanoniczną" inwolucją, indukowaną przez sprzężenie zespolone $\mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$, $f(x,y) \mapsto \overline{f}(x,y)$.

Zauważmy, że każda półliniowa inwolucja $\sigma : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ da nam pewien schemat X_0, spełniający $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong X_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ oraz jeżeli inwolucje σ_1, σ_2 będą spełniały $\sigma_1 = \alpha \circ \sigma_2 \circ \alpha^{-1}$ dla pewnego $\mathbb{C}$-automorfizmu $\alpha : X \to X$, to otrzymane schematy X_0 będą izomorficzne.

Ponadto mamy bijekcję między półliniowymi inwolucjami $\sigma : X \to X$ oraz $\mathbb{C}$-liniowymi inwolucjami $\iota : X \to X$ komutującymi z S, daną przez $\sigma \mapsto \iota := S \circ \sigma$, (z półliniowości mamy: $\sigma \circ S = S \circ \sigma$). Zauważmy ponadto, że jeżeli inwolucje ι_1, ι_2 będą spełniały $\iota_1 = \alpha \circ \iota_2 \circ \alpha^{-1}$ dla $\alpha \in Aut_{\mathbb{C}}(X)$, $S \circ \alpha = \alpha \circ S$, to otrzymane schematy X_0 będą izomorficzne.

Pokażemy, że na $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ istnieją tylko trzy nierównoważne $\mathbb{C}$-liniowe inwolucje, komutujące z S. Traktując $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ jako rozmaitość (Proposition II.2.6) możemy skorzystać z opisu automorfizmów $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ jako $PGl(1,\mathbb{C})$ (zadanie I.6.6). Łatwo zauważyć, że inwolucje komutujące z S odpowiadają macierzom $A \in PGl(1,\mathbb{R})$, $A^2 = \pm I_2$. Z dokładnością do podobieństwa (nad $\mathbb{R}$) i rzutowej równoważności (nad $\mathbb{C}$) istnieją trzy takie macierze: I_2, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, odpowiadające $\mathbb{C}$-liniowym inwolucjom $\iota_0 = id_X$, ι_1 indukowanej przez $f(x,y) \mapsto f(-x,y)$ oraz ι_2 indukowanej przez homomorfizm $\mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$, $f(x,y) \mapsto f(-y,x)$. Dwie pierwsze inwolucje odpowiadają równoważnym półliniowym inwolucjom $\sigma_0 = S$, $\sigma_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

Trzecia inwolucja σ_2 jest indukowana przez automorfizm $\mathbb{C}[x,y]$, $f(x,y) \mapsto \overline{f}(-y,x)$.

- inwolucja $\sigma_0 = S$ odpowiada $X_0 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$,
- inwolucja σ_1 jest równoważna z S, więc również odpowiada $X_0 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$,
- inwolucja σ_2 odpowiada $X_0 = Proj(\mathbb{R}[x_0,x_1,x_2]/(x_0^2+x_1^2+x_2^2))$. Istotnie, wtedy $X = Proj(\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]/(x_0^2+x_1^2+x_2^2))$. Izomorfizmy $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dane są wzorami (na punktach domkniętych)

$$\Phi((x_0 : x_1 : x_2)) = (x_0 - ix_2 : ix_1) : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

$$\Psi((x : y)) = (i \cdot (x^2 + y^2) : 2xy : y^2 - x^2) : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X$$

(patrz np. [Silverman, Example I.3.5]). Stąd, jeżeli przez $T : X \to X$ oznaczymy sprzężenie na X, to indukowane sprzężenie na $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dane jest wzorem:

$$(\Phi \circ T \circ \Psi)(x : y) = (\Phi \circ T)(i \cdot (x^2 + y^2) : 2xy : y^2 - x^2) = \Phi(-i \cdot (\overline{x}^2 + \overline{y}^2) : 2\overline{xy} : \overline{y}^2 - \overline{x}^2) =$$

$$= (-i \cdot (\overline{x}^2 + \overline{y}^2) - i \cdot (\overline{y}^2 - \overline{x}^2) : i \cdot 2\overline{xy}) = (-2i \cdot \overline{y}^2 : i \cdot 2\overline{xy}) = (-\overline{y}, \overline{x})$$

– jest to inwolucja σ_2.

2.4.8

(e) g jest rozdzielone, zatem $\Delta : Y \hookrightarrow Y \times_Z Y$ jest domkniętą immersją i ma własność $\mathcal{P}$. Biorąc zatem zmianę bazy $X \times_Y \cdot$ stwierdzamy, że morfizm

$$\Gamma_f : X = X \times_Y Y \to X \times_Y (Y \times_Z Y) = X \times_Z Y$$

również ma własność $\mathcal{P}$. Zauważmy, że morfizm $g \circ f : X \to Z$ ma własność $\mathcal{P}$, zatem jego base change $\pi_Y : X \times_Z Y \to Y$ również. Pozostaje zauważyć, że $f = \pi_Y \circ \Gamma_f$ jest złożeniem dwóch morfizmów o własności $\mathcal{P}$.

2.4.11

(a) **Krok I: redukcja do przypadku $[L : K] < \infty$:**
niech $x_1, \ldots, x_n$ będzie bazą transcendentną L/K oraz $K_1 = K[x_1, \ldots, x_n]$. Rozważmy ideał $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}[x_1, \ldots, x_n] \trianglelefteq \mathcal{O}[x_1, \ldots, x_n]$ i niech $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{p}\mathcal{O}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathfrak{p}}$. Wtedy:

- $\mathcal{O}_1$ jest noetherowskim pierścieniem lokalnym (z tw. Hilberta o bazie) o ciele ułamków K_1,
- $\mathfrak{m}_1 \cap \mathcal{O}[x_1, \ldots, x_n] = \mathfrak{p}$ oraz $\mathfrak{p} \cap O = \mathfrak{m}$, więc $(\mathcal{O}_1, \mathfrak{m}_1)$ dominuje $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$,
- L/K_1 jest algebraicznym, skończenie generowanym rozszerzeniem, więc jest skończone,

więc możemy zastąpić bez straty ogólności K przez K_1 oraz $\mathcal{O}$ przez $\mathcal{O}_1$.

Krok II: istnieją generatory $x_1, \ldots, x_n$ ideału $\mathfrak{m}$ takie, że $x_1 \notin \mathcal{O}'^*$, gdzie $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}]$:

niech $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ będzie dowolnym zbiorem generatorów. Wtedy $\mathfrak{m}^k$ jest generowane przez jednorodne jednomiany stopnia k od $x_1, \ldots, x_n$. Zauważmy najpierw, że dla dowolnego k mamy: $\mathfrak{m}^k \neq \mathfrak{m}^{k+1}$ – istotnie, w przeciwnym wypadku $\mathfrak{m}^j = \mathfrak{m}^{j+1}$ dla każdego $j \geqslant k$. Wtedy jednak $\bigcap_j \mathfrak{m}^j = \mathfrak{m}^k \neq (0)$, przecząc twierdzeniu Krulla o przecięciu.
Wykażemy następujące stwierdzenie:

$$\textit{dla każdego } j \textit{ istnieje } k_j \textit{ takie, że } x_{k_j}^j \notin \mathfrak{m}^{j+1} \ (*)$$

Załóżmy nie wprost, że dla pewnego j mamy: $x_1^j, \ldots, x_n^j \in \mathfrak{m}^{j+1}$. Wtedy jednak mielibyśmy $\mathfrak{m}^{Nj} = \mathfrak{m}^{Nj+1}$ – istotnie, każdy jednorodny jednomian $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ stopnia Nj zawierałby pewną zmienną w potędze $\geqslant j$, więc $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in \mathfrak{m}^{Nj+1}$. Sprzeczność kończy dowód (*).
Z zasady szufladkowej Dirichleta istnieje k takie, że $x_k^j \notin \mathfrak{m}^{j+1}$ dla nieskończenie wielu j; bez straty ogólności $k = 1$. Wtedy dla każdego i mamy $x_k^i \notin \mathfrak{m}^{i+1}$ – istotnie, gdyby $x_k^i \in \mathfrak{m}^{i+1}$, to $x_k^j \in \mathfrak{m}^{j+1}$ dla każdego $j \geqslant i$; sprzeczność.
Załóżmy nie wprost, że $x_1 \in \mathcal{O}[\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}]^*$, tzn.

$$x_1 \cdot \sum_{\alpha_2, \ldots, \alpha_n} a_{\alpha_2, \ldots, \alpha_n} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{\alpha_n} = 1$$

Wtedy jednak wymnażając obie strony przez x_1^M dla dostatecznie dużego M, dostalibyśmy $x_1^M \in \mathfrak{m}^{M+1}$; sprzeczność.

Krok III: konstrukcja R

Niech (jak we wskazówce) $\mathfrak{p}$ będzie minimalnym ideałem pierwszym ideału (x_1) w pierścieniu $\mathcal{O}'$. Wtedy z Hauptidealsatz mamy $ht(\mathfrak{p}) = 1$, więc lokalizacja $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ ma wymiar 1. Dalej niech $B := \widetilde{\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}}$ będzie domknięciem całkowitym $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ w ciele L. Korzystając z twierdzenia Krulla–Akizuki:

Jeżeli A jest noetherowską dziedziną całkowitości wymiaru 1 o ciele ułamków K, L/K jest skończonym rozszerzeniem ciał, zaś $A \subset B \subset L$ pierścieniem, nie będącym ciałem, to B jest noetherowskim pierścieniem wymiaru 1.

stwierdzamy, że $\dim B = 1$. Niech η będzie ideałem maksymalnym B. Zdefiniujmy wreszcie $R := B_\eta$; pokażemy, że R jest DVRem, dominującym $\mathcal{O}$. Istotnie, $\dim R = ht(\eta) = 1$, R jest noetherowskie, i domknięte całkowicie, więc jest DVRem.
Dalej trzeba pokazać, że $\eta B_\eta \cap \mathcal{O} = \mathfrak{m}$. Mamy:

- $\eta B_\eta \cap B = \eta$,
- $\eta \cap \mathcal{O}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathcal{O}'_\mathfrak{p}$ – istotnie, $\eta \cap \mathcal{O}'_\mathfrak{p}$ jest ideałem maksymalnym (Wniosek 5.8 z [AM]), zaś jedyny ideał maksymalny w $\mathcal{O}'_\mathfrak{p}$ to $\mathfrak{p}$,
- $\mathfrak{p}\mathcal{O}'_\mathfrak{p} \cap \mathcal{O}' = \mathfrak{p}$,
- $\mathfrak{p} \cap \mathcal{O} = \mathfrak{m}$ – istotnie, $x_1 \in \mathfrak{p}$, a ponadto $x_i = \frac{x_i}{x_1} \cdot x_1 \in \mathfrak{p}$, więc $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n) \subset \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}$. Z maksymalności $\mathfrak{m}$: $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}$

(b) wystarczy pokazać, że jeżeli dla każdego pierścienia dyskretnej waluacji R zachodzi warunek twierdzenia, to f jest rozdzielone/właściwe. To pokazujemy dokładnie tak, jak w dowodach Twierdzeń 4.3 oraz 4.7, biorąc w dowodzie za R **pierścień dyskretnej waluacji** dominujący pierścień lokalny Noether $\mathcal{O}$ – możemy to zrobić z (a).

Uwagi do zadania:

1. *Noetherowski pierścień waluacji jest DVRem.*
2. *Każda dziedzina całkowitości $\mathcal{O}$ jest dominowana przez pewien pierścień waluacji R, jednak R nie musi być noetherowski, czyli nie musi być DVRem – stąd trudność zadania.*

Podrozdział 2.5

2.5.1

(d)

Lemat Niech $f : X \to Y$ – morfizm przestrzeni z pierścieniem, $\mathcal{F}$ – snop na Y, $\mathcal{G}$ – snop na X. Snopy $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$ oraz $f_*\Big(\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{G})\Big)$ są izomorficzne.
Dowód: dla dowolnego $U \subset Y$:

$$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})(U) = Hom_{\mathcal{O}_Y|_U}\Big(\mathcal{F}|_U, (f_*\mathcal{G})|_U\Big) = Hom_{\mathcal{O}_Y|_U}\Big(\mathcal{F}|_U, f_*(\mathcal{G}|_{f^{-1}(U)})\Big)$$

(korzystając z tego, że (f^*, f_*) jest parą sprzężonych funtorów)

$$= Hom_{\mathcal{O}_Y|_U}\Big(f^*(\mathcal{F}|_U), \mathcal{G}|_{f^{-1}(U)}\Big) = Hom_{\mathcal{O}_Y|_U}\Big(f^*(\mathcal{F})|_{f^{-1}(U)}, \mathcal{G}|_{f^{-1}(U)}\Big) = f_*\Big(\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{G})\Big)(U)$$

Lemat Jeżeli $\mathcal{E}$ jest lokalnie wolny, $f : X \to Y$ jest morfizmem przestrzeni z pierścieniem, to $\widehat{f^*\mathcal{E}} \cong f^*\hat{\mathcal{E}}$.
Dowód: Mamy:

$$f^*(\tilde{\mathcal{E}}) \otimes f^*(\mathcal{E}) \cong f^*(\tilde{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{E}) = f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X,$$

co pozwala na skonstruowanie parowania $f^*(\tilde{\mathcal{E}}) \times f^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{O}_X$ dającego morfizm $f^*(\hat{\mathcal{E}}) \to \widehat{f^*(\mathcal{E})}$. Sprawdzając na źdźbłach stwierdzamy, że jest to izomorfizm.

Korzystając z wcześniejszych podpunktów oraz lematów mamy:

$$f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E}) \cong f_*(\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\hat{\mathcal{E}}, \mathcal{F})) \cong \underline{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\hat{\mathcal{E}}, f_*\mathcal{F}) \cong \mathcal{E} \otimes f_*\mathcal{F}.$$

2.5.4 Załóżmy, że $\mathcal{F}$ jest quasikoherentny na X. Wybierzmy dowolny punkt $x \in X$ oraz jego otoczenie afiniczne $U = Spec(A)$. Wtedy $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ dla pewnego A-modułu M.

Zauważmy, że wybierając dowolny zbiór generatorów dla M dostajemy surjekcję A-modułów

$$\bigoplus_{i\in I} A \to M \to 0$$

Niech K będzie jądrem tego przekształcenia, zaś $\bigoplus_{j\in J} A \to K \to 0$ pewną surjekcją uzyskaną jak wyżej – dostajemy w ten sposób ciąg dokładny:

$$\bigoplus_{j\in J} A \to \bigoplus_{i\in I} A \to M \to 0$$

(zauważmy, że w podobny sposób konstruuje się rezolwentę projektywną) więc $M = coker(\bigoplus_{j\in J} A \to \bigoplus_{i\in I} A)$ oraz:

$$\mathcal{F}|_U \cong coker(\widetilde{\bigoplus_{j\in J} A \to \bigoplus_{i\in I}} A) = \mathrm{coker}(\bigoplus_{j\in J} \mathcal{O}_U \to \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_U)$$

Jeżeli X jest noeterowski, zaś $\mathcal{F}$ – koherentny, to moduły M, K w powyższym dowodzie są skończenie generowane, więc można dobrać I, J jako zbiory skończone.

Na odwrót – załóżmy, że $\mathcal{F}$ jest lokalnie izomorficzny z kojądrem odwzorowania między wolnymi snopami, tzn. dla każdego x istnieje U takie, że:

$$\mathcal{F}|_U \cong \mathrm{coker}(\bigoplus_{j\in J} \mathcal{O}_U \to \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_U)$$

– wtedy $\mathcal{F}|_U$ jest quasikoherentny, jako kojądro odwzorowania między quasikoherentnymi snopami. Pozostaje zauważyć, że quasikoherentność jest własnością lokalną. Ponadto, jeżeli I, J są skończone, zaś X – noeterowski, to $\mathcal{F}$ jest koherentny (Proposition II.5.7.).

2.5.5

(a) Niech $X = \mathbb{A}^1 \backslash \{0\} = Spec(k[x, \frac{1}{x}])$, $Y = \mathbb{A}^1 = Spec(k[x])$, $f : X \to Y$ będzie otwartą immersją, zaś $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X = \widetilde{k[x, \frac{1}{x}]}$. Wtedy $f_*\mathcal{F} = \widetilde{k[x, \frac{1}{x}]}$, gdzie $k[x, \frac{1}{x}]$ traktujemy jako $k[x]$-moduł. Pozostaje zauważyć, że $k[x, \frac{1}{x}]$ nie jest skończonym $k[x]$-modułem.

(b) Niech $f : X \to Y$ będzie domkniętą immersją. Wybierzmy dowolny zbiór afiniczny $U = Spec(A) \subset Y$; wtedy $f : f^{-1}(U) \to U$ jest domkniętą immersją, więc z Corollary II.5.10: $f^{-1}(U) = Spec(A/I)$ dla pewnego ideału $I \trianglelefteq A$. Pozostaje zauważyć, że A/I jest skończonym A-modułem.

(c) niech $U = Spec(A) \subset Y$ będzie dowolnym zbiorem otwartym afinicznym, $f^{-1}(U) = Spec(B)$. Wtedy $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} = \widetilde{M}$ oraz $f_*\mathcal{F}|_U = \widetilde{M}$, gdzie M traktujemy najpierw jako B-moduł, a następnie jako A-moduł. B jest skończonym A-modułem, więc M jest również skończonym A-modułem (bo jest skończonym B-modułem).

2.5.6

(a)

$$X\backslash Supp(m) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) : \frac{m}{1} = 0 \text{ w module } M_\mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) : \exists_{s\notin\mathfrak{p}} \quad m \cdot s = 0\} =$$
$$= \{\mathfrak{p} \in Spec(A) : (A\backslash\mathfrak{p}) \cap Ann(m) \neq \varnothing\} = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) : Ann(m) \not\subset \mathfrak{p}\} = X\backslash V(Ann(m))$$

więc $Supp(m) = V(Ann(m))$.

(b) Niech $M = Am_1 + \ldots + Am_n$ – wtedy $\mathcal{F}$ jest generowany przez cięcia globalne $m_1, \ldots, m_n$, zatem:

$$Supp(\mathcal{F}) = \bigcup_i Supp(m_i) = \bigcup_i V(Ann(m_i)) = V\left(\bigcap_i Ann(m_i)\right) = V(Ann(M))$$

(c) wystarczy pokazać, że $Supp(\mathcal{F})$ jest lokalnie domknięty, to jednak wynika z (b).

(d) Z zadania II.1.20 mamy:

$$0 \to \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U)$$

Zauważmy, że snop $j_*(\mathcal{F}|_U)$ jest quasikoherentny z Proposition II.5.8(c), więc $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$ jest quasikoherentny jako jądro odwzorowania między snopami quasikoherentnymi. Mamy więc: $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F}) = \widetilde{N}$, gdzie:

$$N = \Gamma(X, \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})) = \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \{m \in M : \forall_{\mathfrak{p} \notin Z} \quad \frac{m}{1} = 0 \quad \text{w module } M_{\mathfrak{p}}\} =$$
$$= \{m \in M : \forall_{\mathfrak{p} \notin Z} \quad Ann(m) \not\subset \mathfrak{p}\} = \{m \in M : \forall_{\mathfrak{p} \supset Ann(m)} \quad \mathfrak{p} \in Z\} = \{m \in M : \forall_{\mathfrak{p} \supset Ann(m)} \quad \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\} =$$
$$= \{m \in M : \mathfrak{a} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \supset Ann(m)} \mathfrak{p}\} = \{m \in M : \mathfrak{a} \subset \sqrt{Ann(m)}\} = (\mathfrak{a} \text{ jest skończenie generowany}) =$$
$$= \{m \in M : \exists_n \quad \mathfrak{a}^n \subset Ann(m)\} = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$$

(e) biorąc dowolny zbiór otwarty afiniczny $U = Spec(A)$ oraz korzystając z poprzedniego podpunktu dla $Z := Z \cap U$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}|_U$ dostajemy: $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})|_U \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ (gdzie $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$). Pozostaje zauważyć, że jeżeli M jest skończenie generowany nad pierścieniem Noether, to $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ jest również skończenie generowane (jako podmoduł sk. generowanego modułu nad pierścieniem Noether).

2.5.7

(a) Załóżmy, że $\mathcal{F}_x$ jest generowany przez cięcia $[(s_1, U_1)] \ldots, [(s_k, U_k)]$ jako $\mathcal{O}_{X,x}$-moduł. Przyjmując $U := \bigcup_i U_i$ dostajemy morfizm snopów $\varphi : \mathcal{O}_U^k \to \mathcal{F}|_U$ dany na zbiorze otwartym $V \subset U$ jako:

$$\varphi : \mathcal{O}_U(V)^k \to \mathcal{F}(V), \qquad \varphi(a_1, \ldots, a_k) = \sum_i a_i s_i$$

Zauważmy, że $\varphi_x : \mathcal{O}^k_{X,x} \to \mathcal{F}_x$ jest izomorfizmem. Stąd $(\ker\varphi)_x = 0$. Ale $\ker\varphi$ jest snopem koherentnym, więc z zadania II.5.6 (c) istnieje otwarte otoczenie V_1 punktu x takie, że $\ker\varphi|_{V_1} = 0$. Analogicznie $\operatorname{coker}\varphi|_{V_2} = 0$ dla pewnego otwartego otoczenia V_2 punktu x. Stąd na zbiorze $V_1 \cap V_2$ morfizm snopów φ jest izomorfizmem, co daje tezę.

(b) implikacja ($\Rightarrow$) jest oczywista (źdźbła wolnego $\mathcal{O}_X|_U$-modułu są $\mathcal{O}_{X,x}$-wolnymi modułami), zaś implikacja ($\Leftarrow$) wynika z (a).

(c) załóżmy, że $\mathcal{F}$ jest lokalnie wolny rangi 1. Niech $\check{\mathcal{F}} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ będzie snopem dualnym (patrz zad. II.5.1). Zauważmy, że $\check{\mathcal{F}}|_U = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}_X|_U) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U) \cong \mathcal{O}_X|_U$, więc $\check{\mathcal{F}}$ jest odwracalny. Ponadto z zadania II.5.1:

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \check{\mathcal{F}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$$

Snop $\mathcal{F}$ jest lokalnie wolny rangi 1, więc $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{F}|_U) \cong \mathcal{O}_X|_U$ – dowolny endomorfizm $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ pochodzi lokalnie od mnożenia przez pewien element $\mathcal{O}_X$:

$$\exists_{U_i - \text{ pokrycie } X} \quad \exists_{a_i \in \mathcal{O}_X(U_i)} \quad \forall_{V \subset U_i} \quad f(V)(x) = a_i|_V \cdot x$$

Porównując elementy a_i na przekrojach $U_i \cap U_j$, stwierdzamy, że są one restrykcjami pewnego elementu $a \in \mathcal{O}_X(X)$. Podsumowując, dostajemy: $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{O}_X$.
Na odwrót – załóżmy, że $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$ dla pewnego lokalnie wolnego snopa $\mathcal{G}$. Wtedy, biorąc źdźbła w $x \in X$:

$$\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{F}_x$$

więc z (b) $\mathcal{F}$ jest odwracalny.

2.5.8

(a) Bez straty ogólności $X = Spec(A)$ dla pierścienia Noetherowskiego A, zaś $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ dla skończenie generowanego A-modułu M o generatorach $m_1, \ldots, m_k$. Pokażemy, że dla każdego n zbiór $U_n := \{x \in X : \varphi(x) \leqslant n\}$ jest otwarty. Niech $\mathfrak{p} \in U_n$. Wtedy:

$$\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} \left(M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p})\right) \leqslant n,$$

więc możemy wybrać $\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n} \in M_{\mathfrak{p}}$ takie, że ich obrazy generują $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p})$. Z lematu Nakayamy ([Atiyah, MacDonald, Stwierdzenie 2.8]) wynika, że $\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n}$ generują $M_{\mathfrak{p}}$ jako $A_{\mathfrak{p}}$ moduł. Niech $f = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$, wtedy $\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n} \in M_f$. Rozważmy moduł:

$$N = A_f \frac{x_1}{s_1} + \ldots + A_f \frac{x_n}{s_n} \subset M_f$$

oraz odpowiadający mu koherentny snop $\mathcal{G} = \widetilde{N}$ na $D(f)$. Rozważmy też koherentny snop $\mathcal{H} := \mathcal{F}|_{D(f)}/\mathcal{G}$ na $D(f)$. Mamy: $\mathcal{H}_\mathfrak{p} = 0$, więc z zadania II.5.6 (c) $\mathcal{H}|_V = 0$ dla pewnego otwartego otoczenia V punktu $\mathfrak{p}$. Wynika z tego, że dla każdego $\mathfrak{q} \in V$ moduł $M_\mathfrak{q}$ jest generowany przez $\frac{x_1}{s_1}, \dots, \frac{x_n}{s_n}$, co daje $\varphi(\mathfrak{q}) \leqslant n$.

(b) X jest spójne, zatem wystarczy pokazać, że φ jest stałe w otoczeniu każdego punktu. Możemy zatem bez straty ogólności założyć, że $\mathcal{F}$ jest wolny nad $X = Spec(A)$, tzn. $\mathcal{F} = \widetilde{A^n}$. Wtedy dla każdego $\mathfrak{p} \in X$:

$$\varphi(\mathfrak{p}) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p}) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} \kappa(\mathfrak{p})^n = n.$$

(c) Bez straty ogólności $X = Spec(A)$ dla pewnego pierścienia zredukowanego A, zaś $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Niech $\varphi(x) = n$ dla każdego $x \in X$. Ustalmy $\mathfrak{p} \in Spec(A)$. Niech $y_1, \dots, y_n \in M_\mathfrak{p}$ będą takie, że ich obrazy tworzą bazę $M \otimes_{A_\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p})$ nad $\kappa(\mathfrak{p})$. Wtedy $y_1, \dots, y_n$ generują $M_\mathfrak{p}$ z lematu Nakayamy. Wykażemy, że

$$\begin{array}{ccc} A_\mathfrak{p}^n & \longrightarrow & M_\mathfrak{p} \\ (a_1, \dots, a_n) & \longmapsto & \sum_i a_i y_i \end{array}$$

jest izomorfizmem. Surjektywność wynika z poprzedniego spostrzeżenia, więc wystarczy wykazać, że ma on trywialne jądro. Załóżmy, że $\sum_i a_i y_i = 0$ oraz że $a_1 \neq 0$. Zauważmy, że $A_\mathfrak{p}$ jest zredukowany, więc $\bigcap_{\mathfrak{q} \in Spec(A_\mathfrak{p})} \mathfrak{q} = 0$ oraz $a_1 \notin \mathfrak{q}$ dla pewnego $\mathfrak{q}$.
Z drugiej strony, zauważmy, że $y_1, \dots, y_n$ generują $M_\mathfrak{q} = (M_\mathfrak{p})_\mathfrak{q}$ nad $A_\mathfrak{q}$, generują zatem również $M_\mathfrak{q} \otimes_{A_\mathfrak{q}} \kappa(\mathfrak{q})$ nad $\kappa(\mathfrak{q})$. Ale $\dim_{\kappa(\mathfrak{q})} M_\mathfrak{q} \otimes_{A_\mathfrak{q}} \kappa(\mathfrak{q}) = n$, zatem $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}$ muszą być bazą $M_\mathfrak{q} \otimes_{A_\mathfrak{q}} \kappa(\mathfrak{q})$ nad $\kappa(\mathfrak{q})$. Stąd relacja $\sum_i \overline{a_i y_i} = 0$ pociąga $\overline{a}_i = 0$ dla wszystkich i, czyli $a_i \in \mathfrak{q}$. Sprzeczność, bo $a_1 \notin \mathfrak{q}$! Stąd $M_\mathfrak{p}$ jest wolnym $A_\mathfrak{p}$ modułem. Z zadania II.5.7(b) stwierdzamy, że $\mathcal{F}$ jest lokalnie wolny.

2.5.9

(a) We'll define a map $\alpha_d : M_d \to \Gamma(X, \widetilde{M}(d))$. Let $m \in M_d$. In order to define $\alpha_d(m)$, we have to provide a family of sections $\left(\alpha_d(m)|_{D_+(x)} \in \Gamma(D_+(x), \widetilde{M}(d))\right)_{x \in S_1}$, that agrees on intersections $D_+(x) \cap D_+(y)$. Note that:

$$\Gamma(D_+(x), \widetilde{M}(d)) = \Gamma(Spec(S_{(x)}), \widetilde{M(d)_{(x)}}) = \widetilde{M(d)_{(x)}} = \{\frac{m}{x^a} | m \in M(d)_a\} = \left\{\frac{m}{x^a} | m \in Md + a\right\}$$

Thus we can define: $\alpha_d(m)|_{D_+(x)} = m \in \Gamma(D_+(x), \widetilde{M}(d))$.

(b) analogously to 5.9:

let $M^0 \subset \ldots \subset M^n = M$ be the composition series for M. Then we have the following diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M^j & \longrightarrow & M^{j+1} & \longrightarrow & (S/\mathfrak{p}_j)(l_j) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_*(\widetilde{M^j}) & \longrightarrow & \Gamma_*(\widetilde{M^{j+1}}) & \longrightarrow & \Gamma_*(\widetilde{(S/\mathfrak{p}_j)(l_j)}) & & \end{array}$$

Thus by induction, it suffices to prove that $\alpha : (S/\mathfrak{p}_j)(l_j) \to \Gamma_*(\widetilde{(S/\mathfrak{p}_j)(l_j)})$ is isomorphism in high degrees. Moreover, we can replace S by $(S/\mathfrak{p}_j)(l_j)$. Thus we are left with proving that $\alpha : S \to \Gamma_*(\mathcal{O})$ is an isomorphism in high degrees.

Let $S' = \Gamma_*(\mathcal{O}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Gamma(Proj(S), \mathcal{O}(n))$. Let also $x_0, \dots, x_r \in S_1$ be the set of the generators of S over S_0. Then $S' \subset \bigcap_i S_{x_i}$. Analogously, as in 5.9, we show that:

- S' is a finite S-module, generated by homogeneous elements $f_1, \dots, f_g$ of degrees $d_1, \dots, d_g$ respectively,
- there exists N such that $f_1, \dots, f_g \in \frac{1}{x_j^N} S$ for all j.

Then, for $w > Nr$ we have $S_w f_i \subset S$ (since each monomial in S_w is divisible by x_j^N for some j). Therefore for $W > Nr + \max_i d_i$:

$$S'_W = \sum_i S_{W - d_i} f_i \subset \sum_i S_W = S_W.$$

Note that $S'_W \supset S_W$ – this ends the proof.

(c) Let $\Phi(\mathcal{F}) = \Gamma_*(\mathcal{F})$, $\Psi(M) = \widetilde{M}$. Then $\Psi \circ \Phi = id$, since $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} = \mathcal{F}$ by Proposition II.5.15. Moreover, for $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ we have:

$$\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} = \mathcal{F}$$

and thus by (b): $\Gamma_*(\widetilde{M}) \approx M$, which yields $\Phi \circ \Psi = id$.

2.5.10

Let $S := A[x_0, \ldots, x_r]$ and let $I = \bigoplus_d I_d$ be its homogeneous decomposition.

(a) Let $s \in \overline{I}$ and let $s = \sum_j s_j$ be its homogeneous decomposition. Then $x_i^n s = \sum_j x_i^n s_j \in I$ for some n and all i's. Then, since I is homogeneous, $x_i^n s_j \in I$ for all i's and j's. Thus $s_j \in \overline{I}$ for all j's. This ends the proof.

(b) Firstly, we'll prove that $\Gamma_*(\widetilde{I}) = \overline{I}$. Firstly, note that:

$$\Gamma(\mathbb{P}^n_A, \widetilde{I}(n))|_{D_+(x_i)} = \left\{ \frac{m}{x_i^k} : m \in I_{n+k} \text{ for some } k \right\}.$$

Moreover, $\Gamma_*(\widetilde{I}) \hookrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}) = S$. Thus:

$$\Gamma_*(\widetilde{I}) = \bigoplus_n \left\{ a \in S : \frac{a}{1} = \frac{a_i}{x_i^e} \text{ in ring } S_{x_i} \text{ for some } a_i \in I_{n+e} \text{ and some } e \right\} =$$

$$= \{ a \in S : \quad \exists_n \forall_i \quad x_i^n a \in I \} = \overline{I}.$$

Thus, if I_1, I_2 define the same closed subscheme, then $\widetilde{I_1} = \widetilde{I_2}$ and $\overline{I_1} = \Gamma_*(\widetilde{I_1}) = \Gamma_*(\widetilde{I_2}) = \overline{I_2}$.

(c) If I is any homogeneous ideal such that $\mathcal{I}_Y = \widetilde{I}$, then $\Gamma_*(\mathcal{I}_Y) = \overline{I}$ (cf. (b)) and thus $\Gamma_*(\mathcal{I}_Y)$ is saturated.

(d) Follows immediately by (a), (b), (c).

2.5.13

Lemat Niech R, S będą pierścieniami z gradacją, zaś $\varphi : R \to S$ będzie homomorfizmem zachowującym gradację. Niech S będzie generowany przez elementy gradacji 1. Załóżmy, że istnieje d takie, że dla każdego $d|D$ homomorfizm $\varphi_D : R_D \to S_D$ jest izomorfizmem. Wtedy φ indukuje izomorfizm $f : Proj(S) \to Proj(R)$.

Dowód: Niech $\psi_D : R_D \to S_D$ będzie odwrotnym izomorfizmem dla $d|D$. Zgodnie z zadaniem II.2.14 φ indukuje morfizm $f : U \to Proj(R)$, gdzie $U = \{\mathfrak{p} \in Proj(S) : \mathfrak{p} \not\supset \varphi(S_+)\}$. Zauważmy najpierw, że $U = Proj(S)$. Istotnie, jeżeli $\mathfrak{p} \in Proj(S)$, $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$, to istnieje jednorodne $f \in S_+$ takie, że $f \notin \mathfrak{p}$. Zauważmy jednak, że $f^d \in S_d = \varphi_d(R_d)$ oraz $f^d \notin \mathfrak{p}$. Stąd $\mathfrak{p} \not\supset \varphi(S_+)$ oraz $U = Proj(S)$.
Ponadto, jeżeli $f \in R_+$ jest jednorodne, to mamy izomorfizm zbiorów otwartych

$$Spec(S_{(\varphi(f))}) = D_+(\varphi(f)) \to D_+(f) = Spec(R_{(f)}).$$

Istotnie, zastępując f przez f^d możemy założyć, że f jest gradacji D podzielnej przez d (zbiory otwarte $D_+(f)$, $D_+(\varphi(f))$ pozostają bez zmian). Wtedy φ_D, ψ_D indukują izomorfizmy $R_{(f)} \cong S_{(\varphi(f))}$ – istotnie, dowolny element $S_{(\varphi(f))}$ jest postaci $\frac{a}{\varphi(f)^n}$, gdzie a jest gradacji nD, podzielnej przez d. Dlatego możemy określić homomorfizm $\psi(\frac{a}{\varphi(f)^n}) := \frac{\psi_D(a)}{f^n}$ odwrotny do $\varphi : R_{(f)} \to S_{\varphi(f)}$.

Zauważmy, że na $S^{(d)}$ mamy dwie możliwe gradacje:

- „naturalna” gradacja: $S^{(d)}_i = S_{d \cdot i}$,
- gradacja indukowana przez inkluzję $\varphi : S^{(d)} \hookrightarrow S$, czyli:

$$S^{(d)}_i = \begin{cases} 0, & d \nmid i \\ S_i, & d | i \end{cases}$$

Niech P, R będą pierścieniami uzyskanymi wybierając odpowiednio pierwszą lub drugą gradację, zaś $X_1 = Proj(P)$, $X_2 = Proj(R)$. Schematy te są izomorficzne (konstrukcja Proj-a nie zależy od wyboru gradacji), ale wybór gradacji ma znaczenie przy twistach. Istotnie, $P(k) = R(d \cdot k)$. Stosując lemat do inkluzji $\varphi : R \hookrightarrow S$ dostajemy izomorfizm $Proj(S) \cong X_2$. Z Proposition II.5.12 (c) wynika, że przy izomorfiźmie tym $\mathcal{O}_{X_2}(n)$ odpowiada $\mathcal{O}_{Proj(S)}(n)$ dla każdego n. Stąd: snopowi $\mathcal{O}(1)$ na X_1 odpowiada $\mathcal{O}(d)$ na X_2, które odpowiada $\mathcal{O}(d)$ na $Proj(S)$.

2.5.14

(a)

Krok 1: X jest schematem całkowitym, zaś S jest dziedziną całkowitości.

D: Zauważmy najpierw, że X jest całkowite – wynika to z następujących lematów:

Lemat (Stacks, Tag 030C) Niech R będzie noetherowskim pierścieniem zredukowanym. Wtedy równoważnie:

- R jest normalny (tzn. $R_\mathfrak{p}$ jest całkowicie domkniętą dziedziną całkowitości dla każdego $\mathfrak{p}$),
- R jest całkowicie domknięty w swoim totalnym ciele ułamków $Q(R)$,
- $R \cong \prod_{i=1}^k R_i$, gdzie R_i są całkowicie domkniętymi dziedzinami całkowitości.

Dowód:

Lemat (Stacks, Tag 0357) Niech X – schemat lokalnie Noetherowski. Wtedy równoważnie:

- X jest normalny,
- X jest skończoną sumą rozłączną całkowitych normalnych schematów.

Dowód:

X jest normalny i spójny, jest zatem całkowity. Z zadania 1.2.4 (b) wynika, że I jest ideałem pierwszym, zatem S jest dziedziną całkowitości.

Krok 2: S' jest całkowite nad S.

D: zostało to wykazane w dowodzie twierdzenia 5.19.

Krok 3: S' jest całkowicie domknięte w ciele ułamków.

D: Niech $\mathcal{F} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{O}_X(n)$ – wtedy $S' = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Wystarczy więc wykazać, że $\mathcal{F}$ jest snopem całkowicie domkniętych pierścieni. Jest to własność lokalna, wystarczy więc wykazać, że wszystkie źdźbła są całkowicie domknięte. Niech $\mathfrak{p} \in Proj(S)$ – wtedy:

$$\mathcal{F}_\mathfrak{p} = \bigoplus_{n \geqslant 0} S(n)_{(\mathfrak{p})} = \left\{ \frac{a}{b} \in K : b \notin \mathfrak{p}, \quad b - \text{element jednorodny gradacji } k, \quad a \in S_{\geqslant k} \quad \text{dla pewnego } k \right\}$$

Oznaczmy ostatni pierścień przez R; jest to pierścień z $\mathbb{N}$-gradacją. X jest rozmaitością normalną, więc $R_0 = S_{(\mathfrak{p})}$ jest całkowicie domknięte w swoim ciele ułamków K_0. Niech $x \in S$ będzie dowolnym elementem jednorodnym gradacji 1, który nie należy do $\mathfrak{p}$ – zauważmy, że $(x_0, \ldots, x_n) \not\subset \mathfrak{p}$, więc możemy wybrać taki element. Zauważmy, że $\mathcal{F}_\mathfrak{p} = R_0[x]$. Ponadto x musi być algebraicznie niezależny nad K_0. Istotnie, jeżeli $\sum_i a_i x^i = 0$ dla pewnych $a_i \in K_0$, to porównując gradację dostajemy $a_i = 0$ dla wszystkich i. Stąd $\mathcal{F}_\mathfrak{p} = R_0[x]$ jest pierścieniem wielomianów nad R_0. Zauważmy, że $R_0[x]$ jest domknięte całkowicie w $K_0[x]$ [Atiyah-MacDonald, zad. 5.9], zaś $K_0[x]$ jest całkowicie domknięte w $K_0(x)$ (jako dziedzina z jednoznacznym rozkładem). Stąd $R_0[x]$ jest całkowicie domknięte w $Frac(R_0[x]) = K_0(x)$.

(b) zauważmy, że z definicji $\mathcal{O}_X = \widetilde{S}$, a ponadto z twierdzenia 5.15: $\mathcal{O}_X = \Gamma_*(\mathcal{O}_X)^\sim = \widetilde{S'}$. Stąd z zadania II.5.9 mamy: $S'_d = S_d$ dla dostatecznie dużych d.

(c) niech d_0 będzie takie, że $S_d = S'_d$ dla $d \geqslant d_0$. Pokażemy, że dla $d \geqslant d_0$ pierścień $S^{(d)}$ jest całkowicie domknięty. Skorzystamy z następującego lematu:

Lemat [Zariski, Samuel - Commutative Algebra vol. II, VII.§2 Theorem 11] Niech R będzie noetherowską dziedziną całkowitości z $\mathbb{N}$-gradacją o ciele ułamków K. Niech:

- $\overline{R}$ będzie domknięciem całkowitym R w K,
- $K_q = \left\{ \frac{a}{b} : b \in R_k, a \in R_{k+q} \quad \text{dla pewnego } k \right\}$ (elementy jednorodne stopnia q w K),
- $K^{hom} = \bigoplus_{q \geqslant 0} K_q$.

Wtedy:

(a) $\overline{R} \subset K^{hom}$ (w szczególności $\overline{R}$ jest również pierścieniem z gradacją),

(b) $\overline{R} = \bigoplus_{q \geqslant 0} \overline{R}_q$, gdzie $\overline{R}_q := K_q \cap \overline{R}$.

Z **lematu** wystarczy wykazać, dowolny **jednorodny** element $Frac(S^{(d)})$ całkowity nad $S^{(d)}$ musi należeć do $S^{(d)}$. Niech $x = \frac{a}{b}$, $b \in S_{dk}$, $a \in S_{d(k+q)}$ będzie całkowity nad $S^{(d)}$. Jest on wtedy całkowity również nad S', jako że $S^{(d)} \subset S'$. Ale S' jest całkowicie domknięte, zatem $x \in S'$. Pozostaje zauważyć, że gradacja x jest podzielna przez d, zatem $x \in S^{(d)}$.

(d) zauważmy, że rozmaitość rzutowo normalna jest też normalna. Istotnie, jeżeli S jest całkowicie domknięte, to dla każdego $\mathfrak{p} \in Proj(S)$ pierścień $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})}$ jest również całkowicie domknięty. Zauważmy również, że $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) = k[x_0, \dots, x_r]_n$ (Proposition II.5.13) oraz odwzorowanie $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ faktoryzuje się jako:

$$\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) = k[x_0, \dots, x_r]_n \to (k[x_0, \dots, x_r]/I)_n = S_n \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)).$$

Stąd obraz odwzorowania $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ oraz obraz $S_n \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ są równe. Jeżeli X jest normalne, to mamy zatem równoważnie: X jest rzutowo normalne $\Leftrightarrow$ (z podpunktu (a)) $S = S' \Leftrightarrow$ naturalna iniekcja $S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S'$ jest również surjekcją $\Leftrightarrow$ dla każdego n iniekcja $S_n \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = S'_n$ jest surjekcją $\Leftrightarrow$ dla każdego n odwzorowanie $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ jest surjekcją.

2.5.16

(c)

Jeżeli $M_1 \to M \to M_2 \to 0$ jest ciągiem dokładnym A-modułów, to dla dowolnego $j \geqslant 1$:

$$M_1 \otimes_A S^{j-1}M \to S^j M \to S^j M_2 \to 0.$$

Dowód: Zauważmy najpierw, że podane przekształcenia są dobrze określone. Istotnie, przekształcenie $M_1 \times M^{j-1} \to S^j M$, $(m_1, \dots, m_j) \mapsto m_1 \odot \dots \odot m_j$ jest A-liniowe oraz symetryczne na współrzędnych 2 do j, zatem faktoryzuje się przez $M_1 \otimes_A S^{j-1}M$. Analogicznie, przekształcenie

$$S^j M \to S^j M_2, \qquad (m_1, \dots, m_j) \mapsto \overline{m_1} \odot \dots \odot \overline{m_j}$$

(gdzie $\overline{m}$ oznacza obraz w M_2) jest A-liniowe oraz symetryczne, zatem faktoryzuje się przez $S^j M$.

Oczywiste jest również, że $S^j M \to S^j M_2$ jest surjekcją, a także że złożenie pierwszego i drugiego przekształcenia jest zerowe. Pozostaje pokazać, że

$$\ker(S^j M \to S^j M_2) \subset im(M_1 \otimes_A S^{j-1}M \to S^j M).$$

Niech $\alpha = \sum b_i^{(1)} \odot \dots \odot b_i^{(j)}$, będzie takie, że $\sum_i \overline{b_i^{(1)}} \odot \dots \odot \overline{b_i^{(j)}} = 0$ w $S^j M_2$. Rozważmy przekształcenie:

$$g : M_2^j \to S^j M / im(M_1 \otimes S^{j-1}M \to S^j M), \qquad (a_1, \dots, a_j) \mapsto [a'_1 \odot \dots \odot a'_j],$$

gdzie a'_i jest dowolnym podniesieniem a_i do M. Zauważmy, że jest ono dobrze określone – jeżeli a''_i jest innym podniesieniem, to $a'_i - a''_i = c_i \in M_1$, zatem:

$$a'_1 \odot \dots \odot a'_j = a''_1 \odot \dots \odot a''_j + \sum c_i \odot \dots \equiv a''_1 \odot \dots \odot a''_j \pmod{im(M_1 \otimes S^{j-1}M \to S^j M)}.$$

Jest ono też symetryczne, zatem faktoryzuje się przez $S^j M_2$. Stąd:

$$\sum_i g(b_i^{(1)}, \ldots, b_i^{(j)}) = \tilde{g}(\sum_i \overline{b_i^{(1)}} \odot \ldots \odot \overline{b_i^{(j)}}) = g(0) = 0,$$

czyli $\alpha \in im(M_1 \otimes S^{j-1}M \to S^j M)$. To kończy dowód.

Niech $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ będzie ciągiem dokładnym A-modułów, zaś $F^k := im(S^k M_1 \otimes S^{p-k} M \to S^p M)$, $G^k = S^k M_1 \otimes S^{p-k} M$. Wtedy:

$$S^p M = F^0 \supset F^1 \supset \ldots \supset F^{k+1} = 0.$$

Rozważmy ciąg dokładny:

$$M_1 \otimes_A S^{p-k-1} M \to S^{p-k} M \to S^{p-k} M_2 \to 0$$

i stensorujmy go przez $S^k M_1$. Zauważmy, że

$$im(S^k M_1 \otimes S^{p-k} M \to S^p M) = im(S^{k-1} M_1 \otimes M_1 \otimes S^{p-k} M \to S^p M),$$

zatem jak łatwo zauważyć:

$$G_{k+1} \to G_k \to S^k M_1 \otimes S^{p-k} M_2 \to 0.$$

Rozważmy diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd}
 & G^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & G^k \arrow[r] \arrow[d, two heads] & S^k M_1 \otimes S^{p-k} M_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^{k+1} \arrow[r] & F^k \arrow[r] & S^k M_1 \otimes S^{p-k} M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Z dokładności górnego wiersza można łatwo dostać dokładność drugiego oraz:

$$F^k / F^{k+1} \cong S^k M_1 \otimes S^{p-k} M_2.$$

Jeżeli zatem $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ jest ciągiem dokładnym $\mathcal{O}_X$-modułów, to podstawiając $M_1 = \mathcal{F}'(U)$, itd. dostaniemy filtrację presnopów $\mathcal{F}^0 \supset \ldots \supset \mathcal{F}^{p+1} = 0$, której ilorazy to presnopy $U \mapsto S^k \mathcal{F}'(U) \otimes S^{p-k} \mathcal{F}''(U)$. Usnopowiając, dostajemy tezę.

(d) Filtrację uzyskujemy analogicznie.

Niech $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ oraz niech n', n, n'' będą rangami odpowienich snopów. Wtedy $n = n' + n''$. Ponadto z filtracji dla $\bigwedge^n \mathcal{F}$ dostajemy:

$$\mathcal{F}^k / \mathcal{F}^{k+1} \cong \bigwedge^k \mathcal{F}' \otimes \bigwedge^{n-k} \mathcal{F}'' = \begin{cases} 0, & k \neq n' \\ \bigwedge^{n'} \mathcal{F}' \otimes \bigwedge^{n''} \mathcal{F}'', & k = n' \end{cases}.$$

Stąd $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 = \ldots = \mathcal{F}^{n'}$, $\mathcal{F}^{n'+1} = \ldots = 0$ oraz $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{n'} / \mathcal{F}^{n'+1} = \bigwedge^{n'} \mathcal{F}' \otimes \bigwedge^{n''} \mathcal{F}''$.

2.5.17

(a) załóżmy, że $f : X \to Y$ jest afiniczne. Chcemy pokazać, że przeciwobraz dowolnego afinicznego podzbioru Y jest afiniczny. Bez straty ogólności załóżmy zatem, że $Y = Spec(A)$ jest afiniczne. Z założenia istnieje zatem pokrycie zbiorami afinicznymi takie, że przeciwobraz każdego zbioru z pokrycia jest afiniczny w X. Bez straty ogólności możemy „rozdrobnić” to pokrycie tak, by było postaci $D(f_1), \ldots, D(f_n)$, gdzie $(f_1, \ldots, f_n) = A$. Niech $g_i := f^{\#}(f_i) \in \mathcal{O}_X(X)$. Zauważmy, że:

$$f^{-1}(D(f_i)) = \{x \in X : f(x) \in D(f_i)\} = \{x \in X : f_i \in \mathfrak{m}_{Y,f(x)}\} = \{x \in X : f^{\#}(f_i) \in \mathfrak{m}_{X,x}\} = X_{g_i}$$

(skorzystaliśmy tu z tego, że $(f^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x}) = \mathfrak{m}_{Y,f(x)}$ – definicja morfizmu schematów). Z założenia $X_{g_i} = f^{-1}(D(f_i))$ jest afiniczne dla każdego i, zatem X jest afiniczne z zadania II.2.17.

(b) Quasizwartość morfizmu afinicznego jest natychmiastowa. Ponadto, jeżeli $\varphi : A \to B$ indukuje $f : X \to Y$, gdzie $Y = Spec(A)$, $X = Spec(B)$, to $\Delta : X \times_Y X \to X$ pochodzi od homomorfizmu $B \otimes_A B \to B$, $b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 \cdot b_2$. Ale ostatni homomorfizm jest surjekcją ($1 \otimes b \mapsto b$), zatem indukuje domkniętą immersję. To oznacza, że f jest rozdzielone z definicji.

(c) Niech $\mathcal{U}$ – rodzina otwartych afinicznych podzbiorów Y. Dla dowolnego $U \in \mathcal{U}$ rozważmy morfizm $\pi_U : X_U \to U$, gdzie $X_U = Spec(\mathcal{A}(U))$. Skleimy rodzinę schematów $\{X_U : U \in \mathcal{U}\}$ (patrz zadanie II.2.12) w schemat $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ oraz morfizmy $\pi_U : X_U \to U$ w morfizm $\pi : \mathbf{Spec}(\mathcal{A}) \to Y$.

Sposób I: własność uniwersalności.

$\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ będzie miało następującą własność uniwersalności: dla dowolnego $X \in \mathbf{Sch}/Y$ o morfizmie strukturalnym $f : X \to Y$ mamy funktorialną bijekcję: $Hom_{\mathbf{Sch}/Y}(X, \mathbf{Spec}(\mathcal{A})) \cong Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}, f_*\mathcal{O}_X)$. Zauważmy, że własność ta wyznacza obiekt $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ jednoznacznie.

Krok I: $Y = Spec(R)$, $\mathcal{A} = \widetilde{A}$

Wykażemy, że w tym przypadku $\mathbf{Spec}(\mathcal{A}) := Spec(A)$ spełnia tą własność uniwersalności. Istotnie, korzystając z zadań II.2.4 oraz II.5.3:

$$Hom_{\mathbf{Sch}/Y}(X, \mathbf{Spec}(\mathcal{A})) = Hom_{\mathbf{Sch}/Y}(X, Spec(A)) = Hom_{\mathcal{O}_Y(Y)}(A, \mathcal{O}_X(X)) = Hom_{\mathcal{O}_Y}(\widetilde{A}, f_*\mathcal{O}_X).$$

Krok II: jeżeli $\pi : \mathbf{Spec}(\mathcal{A}) \to Y$ spełnia własność uniwersalności dla $(Y, \mathcal{A})$, to $\pi : \mathbf{Spec}(\mathcal{A}) \times_X U \to U$ spełnia własność uniwersalności dla $(U, \mathcal{A}|_U)$, gdzie $U \subset Y$ – otwarty podzbiór Y.

(Na podstawie Ravi Vakil, Foundations of Alegebraic Geometry, Proposition 17.1.3)

Niech $V := \mathbf{Spec}(\mathcal{A}) \times_X U$, X będzie U-schematem o morfizmie strukturalnym $f : X \to U$, zaś $j : U \to Y$ – otwarta immersja. Niech też $g := j \circ f : X \to Y$. U-morfizm $X \to V$ odpowiada Y-morfizmowi $X \to \mathbf{Spec}(\mathcal{A})$. Z uniersalności $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ odpowiada to jednoznacznie $\mathcal{O}_Y$-morfizmowi $\mathcal{A} \to g_*\mathcal{O}_X$. Ze sprzężoności g_*, g^* odpowiada to z kolei jednoznacznie morfizmowi $g^*\mathcal{A} = f^*(j^*\mathcal{A}) \to \mathcal{O}_X$, co przechowuje tą samą informację, co $f^*(\mathcal{A}|_U) \to \mathcal{O}_X$ (jako że $j^*\mathcal{A}$ jest „zerowe poza U”). Ze sprzężoności odpowiada to znowu pewnemu morfizmowi $\mathcal{A}|_U \to f_*\mathcal{O}_X$. To kończy dowód.

Krok III: sklejanie.

Niech Y – dowolny schemat, $\mathcal{U}$ – zbiór otwartych afinicznych podzbiorów Y. Rozważmy rodzinę $\{\mathbf{Spec}(\mathcal{A}(U)) : U \in \mathcal{U}\}$ wraz z naturalnymi morfizmami $\pi_U : \mathbf{Spec}(\mathcal{A}(U)) \to U$. Wtedy z własności uniwersalności (krok II) $\pi_U^{-1}(U \cap V) \cong \pi_V^{-1}(U \cap V)$ dla dowolnych $U, V \in \mathcal{U}$. Możemy zatem skleić tą rodzinę do schematu $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$, zaś morfizmy π_U do morfizmu $\pi : \mathbf{Spec}(\mathcal{A}) \to Y$.

Krok IV: własność uniwersalności.

Niech $f : X \to Y$. Y-morfizm $X \to \mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ jest równoważny ze zgodną rodziną U-morfizmów $f^{-1}(U) \to \pi^{-1}(U)$ dla każdego $U \in \mathcal{U}$. Z afinicznej uniwersalności (krok I) rodzina ta odpowiada zgodnej rodzinie $\mathcal{O}_X|_U$-morfizmów $f_*\mathcal{O}_X|_U \to \mathcal{A}|_U$ dla każdego $U \in \mathcal{U}$, zaś takie morfizmy odpowiadają (ze sklejania) morfizmowi $f_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$. To kończy dowód.

Sposób II: pullback otwartej immersji i relatywne sklejanie *(na podstawie Stacks oraz Daniel Murfet, Relative Affine Schemes, który jest na podstawie EGA II §1.2, §1.3*

Krok I: Niech X – schemat, $U \subset V \subset X$ – otwarte afiniczne podzbiory, $\mathcal{F}$ – quasikoherentny snop na X. Morfizm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ a \otimes b & \longmapsto & b \cdot a|_U \end{array}$$

$\mathcal{O}_X(U)$-modułów jest izomorfizmem.

Dowód: Niech $j : U \to V$ – kanoniczne zanurzenie, $U = Spec(A)$, $V = Spec(B)$, $\mathcal{F}|_U = \widetilde{M}$, $\mathcal{F}|_V = \widetilde{N}$. Wtedy omawiane odwzorowanie to $N \otimes_B A \to M$. Ale $\widetilde{N}|_U \cong \widetilde{M}$, więc dla każdego $\mathfrak{p} \in U$ mamy izomorfizm $(N \otimes_B A)_\mathfrak{p} = N \otimes_{B_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p}$. Stąd omawiany homomorfizm jest izomorfizmem.

Krok II: Diagram

$$\begin{tikzcd} Spec(\mathcal{A}(U)) \arrow[r] \arrow[d] & Spec(\mathcal{A}(V)) \arrow[d] \\ U \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

(gdzie górna strzałka jest indukowana przez homomorfizm restrykcji, zaś pionowe przez „strukturalne" homomorfizmy $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{A}(U)$, $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{A}(V)$) jest kartezjański. Górna strzałka jest otwartą immersją.

Dowód: kartezjańskość wynika z przyłożenia funktora *Spec* do kroku I. Ponadto pullback otwartej immersji jest otwartą immersją.

Krok III: relatywne sklejanie

Twierdzenie (o relatywnym sklejaniu, [Stacks, Tag 01LH]) Niech S – schemat, $\mathcal{B}$ – baza topologii dla S. Załóżmy, że dane mamy:

- dla każdego $U \in \mathcal{B}$ schemat $f_U : X_U \to U$ nad U,
- dla dowolnych $U, V \in \mathcal{B}$, $U \subset V$, morfizm $\rho_{U,V} : X_U \to X_V$ taki, że:
  - $\rho_{U,V} : X_U \to f_V^{-1}(U)$ jest izomorfizmem,
  - dla $W \subset U \subset V$: $\rho_{W,V} = \rho_{U,V} \circ \rho_{W,U}$.

Wtedy istnieje dokładnie jeden schemat $f : X \to S$ wraz z U-izomorfizmami $i_U : f^{-1}(U) \to X_U$ taki, że dla $U \subset V$ morfizm

$$X_U \xrightarrow{i_U^{-1}} f^{-1}(U) \to f^{-1}(V) \xrightarrow{i_V} X_V$$

to $\rho_{U,V}$.

Dowód: na Stacksie – przez reprezentowalność jakiegoś funktora. Ale może da się wykorzystać zwykłe sklejanie?

Krok IV: konstrukcja Spec($\mathcal{A}$)

Z poprzednich kroków wynika, że możemy skleić $Spec(\mathcal{A}(U))$ dla afinicznych podzbiorów otwartych U schematu Y.

(d) morfizm $\pi : \mathbf{Spec}(\mathcal{A}) \to Y$ jest afiniczny, ponieważ przeciwobraz dowolnego zbioru afinicznego jest z definicji afiniczny. Ponadto z własności uniwersalności morfizm $id : \mathbf{Spec}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ odpowiada pewnemu morfizmowi $\mathcal{A} \to \pi_* \mathcal{O}_{\mathbf{Spec}(\mathcal{A})}$. Śledząc konstrukcję tego homomorfizmu, łatwo zauważyć, że jest on izomorfizmem po obcięciu do dowolnego afinicznego $U \subset Y$. To dowodzi izomorfizmu.

Załóżmy, że $f : X \to Y$ jest afinicznym morfizmem oraz $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{A}$. Wtedy dla dowolnego afinicznego $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ też jest afiniczny, zatem:

$$f^{-1}(U) = Spec(\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))) = Spec(f_*(\mathcal{O}_X)(U)) = Spec(\mathcal{A}(U)).$$

Z konstrukcji $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ przez sklejenie oraz własności uniwersalności sklejenia stwierdzamy, że $X \cong f_* \mathcal{O}_X$.

(e) bez straty ogólności $X = Spec(A)$. Na zbiorze $\pi^{-1}(U) = Spec(\mathcal{A}(U))$ (gdzie $U \subset Y$ – otwarty afiniczny) określamy $\mathcal{M}$ następująco: $\widetilde{\mathcal{M}}|_U := \widetilde{\mathcal{M}(U)}$ (zauważmy, że $\mathcal{M}(U)$ jest z założenia $\mathcal{A}(U)$-modułem). Stwierdzenie, że $\mathcal{M} \mapsto \widetilde{\mathcal{M}}$ oraz $\mathcal{F} \mapsto f_* \mathcal{F}$ są wzajemnie odwrotne pozostawiamy jako przeliczenie.

2.5.18

(a) Niech $U_i = Spec(A_i)$ będzie pokryciem afinicznym Y takim, że istnieją izomorfizmy $\Phi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \to \mathcal{O}^n_{U_i}$. W oczywisty sposób $S(\Phi_i) : S(\mathcal{E}) \to S(\mathcal{O}^n_{A_i})$ jest izomorfizmem. Pozostaje wykazać, że $S(\mathcal{O}^n_{A_i}) \cong \mathcal{O}_{A_i[x_1,\ldots,x_n]}$ – wtedy $f^{-1}(U_i) \cong Spec(\mathcal{E}(U_i)) \cong Spec(A_i[x_1,\ldots,x_n]) \cong \mathbb{A}^n_{A_i}$.

Istotnie, izomorfizm dany jest przez:

$$S^k(\mathcal{O}^n_{A_i})(V) \ni \quad e_{i_1} \odot \ldots \odot e_{i_k} \mapsto x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} \in \mathcal{O}_{A_i[x_1,\ldots,x_n]}(V)$$

dla $V \subset U$ (bazą $\mathcal{O}_A(V)^n$ jako wolnego $\mathcal{O}_A(V)$-modułu są wektory $e_j = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$, zaś bazą $S^k(\mathcal{O}_A(V)^n)$ – wektory $e_{i_1} \odot \ldots \odot e_{i_k}$ dla $1 \leqslant i_1,\ldots,i_k \leqslant n$).

Niech $V = Spec(B) \subset U_i \cap U_j$. Wtedy $(\Phi_j \circ \Phi_i^{-1})|_V : \mathcal{O}^n_V \to \mathcal{O}^n_V$ jest $\mathcal{O}_V$-liniowym automorfizmem, zatem jest zadany przez macierz z $Gl_n(B) := \{[a_{ij}]_{ij} : \det[a_{ij}]_{i,j} \in B^\times\}$. Stąd również $\phi_j \circ \psi_i^{-1}|_{f^{-1}(V)} = (S(\Phi_j) \circ S(\Phi_i^{-1}))|_V$ jest B-linowym automorfizmem.

(b) strukturę $\mathcal{O}_X$-modułu wystarczy zadać lokalnie, zatem bez straty ogólności $X = Spec(A)$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^n_X$, $X = \mathbf{Spec}(\mathcal{E}) = \mathbb{A}^n_A$. Cięcia $s : Y \to X$ są równoważne z homomorfizmami A-algebr $\theta : A[x_1,\ldots,x_n] \to A$, zaś te są wyznaczone przez wartości $(\theta(x_1),\ldots,\theta(x_n))$. Stąd strukturę A-modułu na zbiorze cięć można wprowadzić następująco:

$$(\theta_1(x_1),\ldots,\theta_1(x_n)) + (\theta_2(x_1),\ldots,\theta_2(x_n)) := (\theta_1(x_1)+\theta_2(x_1),\ldots,\theta_1(x_n)+\theta_2(x_n))$$

$$a \cdot (\theta(x_1),\ldots,\theta(x_n)) := (a\cdot\theta(x_1),\ldots,a\cdot\theta(x_n))$$

(Uwaga: $\theta_1 + \theta_2$, $a \cdot \theta$ nie są homomorfizmami A-algebr, bo nie przeprowadzają jedynki na jedynkę. Dlatego musimy działać na n-kach).

(c) W przykładzie opisany jest morfizm $\mathcal{O}_Y$-modułów $F : \check{\mathcal{E}} \to \mathcal{S}(X/Y)$. Pokażemy, że jest on bijekcją na dowolnym zbiorze afinicznym otwartym $V = Spec(A) \subset Y$ takim, że $\mathcal{E}|_U \cong \mathcal{O}^n_U$. Istotnie, niech $t \in \mathcal{S}(X/Y)(V)$ będzie cięciem wiązki wektorowej X nad V, czyli $t : V \to X$, $f \circ t = id$. Zauważmy, że $f^{-1}(V) \cong Spec(S(\mathcal{E})(V)) \cong Spec(A[x_1,\ldots,x_n])$, zatem $t \in Hom_{\mathcal{O}_V}(Spec(A), Spec(A[x_1,\ldots,x_n]))$ odpowiadają A-homomorfizmom $A[x_1,\ldots,x_n] \to A$, które to z kolei odpowiadają wyborowi n elementów z A. Z drugiej strony, elementy $\check{\mathcal{E}}(V) = Hom_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E}|_V, \mathcal{O}_V) = Hom_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}^n_V, \mathcal{O}_V) = Hom_A(A^n, A)$ również odpowiadają wyborowi n elementów z A. To dowodzi, że $F|_U$ jest bijekcją. Stąd F jest izomorfizmem na pewnym pokryciu Y, jest zatem izomorfizmem snopów (przykładowe uzasadnienie: jest izomorfizmem na pokryciu, zatem jest izomorfizmem na źdźbłach).

(d) przedstawione w zadaniu przyporządkowania:

$$\begin{array}{rcl} \text{snopy lokalnie wolne rangi } n \text{ na } Y & \longleftrightarrow & \text{wiązki wektorowe rangi } n \text{ nad } Y \\ \mathcal{E} & \overset{\Phi}{\longmapsto} & \mathbf{V}(\mathcal{E}) := \mathbf{Spec}(S(\mathcal{E})) \\ \mathcal{S}(X/Y)^{\vee} & \overset{\Psi}{\longleftarrow\!\shortmid} & X \end{array}$$

są wzajemnie odwrotne:

- $\Psi \circ \Phi = id$, bo: $\mathcal{E} \cong \mathcal{S}(X/Y)^{\vee}$ z podpunktu (c),
- $\Phi \circ \Psi = id$, bo: jeżeli $f : X \to Y$ jest dowolną wiązką wektorową, to f jest odwzorowaniem afinicznym, więc z zadania II.5.17 $X = \mathbf{Spec}(\mathcal{E})$. Wykazaliśmy jednak, że $\mathcal{S}(X/Y) \cong \mathcal{E}^{\vee}$, zatem $Spec(\mathcal{S}(X/Y)^{\vee}) = X$.

Podrozdział 2.6

2.6.2 Niech $\mathfrak{p} := I(X)$. Zauważmy, że przyporządkowanie $f \mapsto (f)$ na rzutowym schemacie możemy określić nie tylko dla elementów $K(X)^*$, ale i dla elementów $S(X)$ (patrz dowód Proposition 6.4). Podobnie, jeżeli $Y \subset X$, to waluację $v_Y : K(X) \to \mathbb{Z}$ można przedłużyć do waluacji $S(X) \to \mathbb{Z}$. Istotnie, jeżeli $Y \cap \{x_i \neq 0\} \neq \varnothing$, to można zdefiniować $v_Y(f) := v_Y(f/x_i^d)$ dla $f \in S(X)$ stopnia d. Wówczas dla $V = V(f)$ mamy: $V.X = \sum_i v_{Y_i}(f)Y_i$.

(a) odwzorowanie z grupy wolnej abelowej wystarczy zadać na bazie.

(b) Z jednoznaczności rozkładu w $k[x_0, \ldots, x_n]$ oraz z liniowości funkcji $D \mapsto D.X$ można przyjąć, że $D = (f)$ dla nierozkładalnego $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$. Wtedy $D = Y$, gdzie $Y = V(f) \subset \mathbb{P}^n_k$. Zauważmy, że $Y \cap X = \varnothing$, zatem $f \notin \mathfrak{p}$. Niech $\overline{f} \neq 0$ będzie obrazem f w $S(X) = k[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{p} = k[\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_n]$. Wtedy $D.X = \sum_i v_{Y_i}(\overline{f})Y_i = (\overline{f})$ (gdzie $Y \cap X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$).

(c) Niech $Y := Y_i$ dla pewnego ustalonego i, $\mathfrak{q} = I(Y) \trianglelefteq S(X)$, $S = k[x_0, \ldots, x_n]$, $S' = (S/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$. Wówczas:

$$i(X, V; Y) = length_{S_{\mathfrak{q}}}(S/(I(X) + I(V)))_{\mathfrak{q}} = length_{S_{\mathfrak{q}}}(S'/fS') = length_{S'}(S'/fS')$$

Ale S' jest pierścieniem z dyskretną waluacją v_Y, zatem jeżeli $f = \pi^k \cdot u$ dla uniformizatora π oraz $k = v_Y(f)$, to $S'/fS' \cong S'/\pi^k$. Ostatni pierścień ma zaś długość k nad S', zatem $i(X, V; Y) = k = v_Y(f)$.

Równość $\deg(D.X) = (\deg D) \cdot (\deg X)$ wystarczy z liniowości udowodnić dla D – dywizora pierwszego. Ale z twierdzenia Bezout:

$$\deg(D.X) = \sum_i i(X, V; Y_i) \cdot \deg Y_i = \deg X \cdot \deg V.$$

(d) niech $D = (f/g)$ dla $f, g \in S(X)$. Niech F, G będą dowolnymi podniesieniami f, g do $k[x_0, \ldots, x_n]$ – wtedy z (b): $D = (F/G).X$. Stąd również $\deg D = \deg(F/G) \cdot \deg X = 0 \cdot \deg X = 0$.

Przemienność diagramu to równość $\deg(D.X) = (\deg D) \cdot (\deg X)$. Iniektywność $Cl\,\mathbb{P}^n \to Cl\,X$ wynika od razu z diagramu.

2.6.3

(a) Mamy:

$$X = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} : (x_0 : \ldots : x_n) \in V\},$$
$$\overline{X} = \{(x_0 : \ldots : x_n : x_{n+1}) \in \mathbb{P}^{n+1} : (x_0 : \ldots : x_n) \in V\} \cup \{P\},$$

gdzie $P = (0 : \ldots : 0 : 1)$. Niech $U_i := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in V : x_i \neq 0\}$ – wtedy:

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(x_0 : \ldots : 1 : \ldots : x_n : x_{n+1}) \in \mathbb{P}^{n+1} : (x_0 : \ldots : 1 : \ldots : x_n) \in U_i\} \cong U_i \times \mathbb{A}^1$$

– posyłamy $(x_0 : \ldots : 1 : \ldots : x_n : x_{n+1}) \mapsto ((x_0 : \ldots : 1 : \ldots : x_n), x_{n+1})$; zauważmy, że warunek $x_i = 1$ zapewnia, że x_{n+1} jest jednoznacznie wyznaczone.

????

(b) Niech $H = \{f = 0\}$, gdzie f – wielomian stopnia 1. Wówczas $V - \pi^*(V.H) = (x_{n+1}/f)$. Istotnie, $V = \{x_{n+1} = 0\} \subset \overline{X}$. Ponadto $V.H = V.(f) = (f) \in Cl(V)$ (wykazaliśmy to w zadaniu II.6.2 (b)) oraz $\pi^*((f)) = (f) \in Cl(\overline{X})$.

Łatwo zauważyć, że opisane przekształcenia są tożsame z opisanymi w Proposition II.6.5, więc pozostała część zadania wynika z Proposition II.6.5.

(c) Z Proposition II.6.2: $S(V)$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu $\Leftrightarrow$ $S(V)$ jest pierścieniem normalnym oraz $Cl(X) = Cl(Spec(S(V))) = 0 \Leftrightarrow$ V jest rzutowo normalne oraz $Cl(X) = 0 \Leftrightarrow$ (z ciągu dokładnego z podpunktu (b)) V jest rzutowo normalne oraz $Cl(V) = \langle V.H \rangle \cong \mathbb{Z}$.

(d) Niech $S := S(V)$, zaś $\mathfrak{p} = (x_0, \ldots, x_n) \trianglelefteq S$ będzie ideałem pierwszym odpowiadającym punktowi P. Naturalne odwzorowanie $Cl(X) \to Cl(Spec(\mathcal{O}_P))$ dane jest wzorem: $[\mathfrak{q}] \mapsto [\mathfrak{q}S_{\mathfrak{p}}]$ (utożsamiamy ideał pierwszy z odpowiadającym mu cyklem pierwszym). Jest ono surjekcją (zawsze), ponieważ każdy ideał pierwszy wysokości 1 w $S_{\mathfrak{p}}$ jest postaci $\mathfrak{q}S_{\mathfrak{p}}$. Pozostaje pokazać, że jest ono iniekcją.

Zauważmy, że naturalne odwzorowanie $Cl(V) \to Cl(X)$ jest surjekcją z podpunktu (b) o jądrze izomorficznym z $\mathbb{Z}$ oraz generowanym przez $div(h)$, gdzie h jest dowolnym wielomianem stopnia 1 takim, że $X \not\subset \{h = 0\}$. Wystarczy pokazać, że $Cl(V) \to Cl(Spec(\mathcal{O}_P))$ ma to samo jądro.
Zauważmy, że $Cl(V)$ jest generowane przez elementy postaci $\sum_{\mathfrak{q}} n_{\mathfrak{q}} \cdot \mathfrak{q}$, gdzie $\mathfrak{q}$ są **jednorodnymi** ideałami pierwszymi wysokości 1 (utożsamiamy ideał pierwszy z odpowiadającym mu cyklem pierwszym) – w szczególności $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Naturalne odwzorowanie $Cl(X) \to Cl(Spec(\mathcal{O}_P))$ dane jest wzorem: $[\mathfrak{q}] \mapsto [\mathfrak{q}S_{\mathfrak{p}}]$.

Załóżmy, że $\sum_{\mathfrak{q}} n_{\mathfrak{q}} \cdot \mathfrak{q}S_{\mathfrak{p}} = div(x)$ dla pewnego $x \in K := Frac(S)$.

Lemat Jeżeli S jest pierścieniem z gradacją, $\mathfrak{n}$ jest ideałem pierwszym, to:

$$\mathfrak{n}^* := \{x \in \mathfrak{n} : x - \text{jednorodny}\}$$

jest ideałem pierwszym wysokości $ht(\mathfrak{n}) - 1$.
Dowód: http://mathoverflow.net/q/97753, Thomas Kahle

Lemat W powyższej sytuacji

$$\bigcap_{\mathfrak{n}} S_{\mathfrak{n}}^* = \{f \cdot g : f \in S_{\mathfrak{p}}, g - \text{jednorodny element ciała } K\},$$

gdzie przekrój bierzemy po wszystkich niejednorodnych ideałach pierwszych $\mathfrak{n}$ wysokości 1, zawartych w $\mathfrak{p} := S_+$.
Dowód: zawieranie $\supset$ wynika z poprzedniego lematu. Istotnie, $\mathfrak{n}^* = 0$, więc $\mathfrak{n}$ nie zawiera elementów jednorodnych, a zatem każdy element jednorodny jest odwracalny w $R_{\mathfrak{n}}$. Nie wiem, czy przeciwne zawieranie jest prawdziwe. ?????????????????

Zauważmy, że $div(x)$ zawiera tylko ideały jednorodne, zatem $x = f \cdot g$, gdzie $f \in S_{\mathfrak{p}}, g$ – jednorodny element ciała K (stopnia $d \in \mathbb{Z}$). Stąd $\sum_{\mathfrak{q}} n_{\mathfrak{q}} \cdot \mathfrak{q} S_{\mathfrak{p}} = div(g)$. Łatwo zauważyć, że w grupie $Div(V)$: $div(g) = \sum_{\mathfrak{q}} n_{\mathfrak{q}} \cdot \mathfrak{q}$. Ponadto $div(g) = div(g/h^d) + d \cdot div(h) \sim d \cdot div(h)$, gdzie h jest stopnia 1 (jak wyżej). To kończy dowód.

2.6.4 Niech $K = Frac(A) = k(x_1, \ldots, x_n)[z]/(z^2 - f)$. Wybierzmy dowolny element $\alpha = g + hz \in K$, (gdzie $g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$) który jest całkowity nad A; wykażemy, że $\alpha \in A$.
Jeżeli $\alpha = g \in k(x_1, \ldots, x_n)$, to oczywiście $\alpha \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ($k[x_1, \ldots, x_n]$ jest domknięte całkowicie).
Załóżmy, że $\alpha \notin k(x_1, \ldots, x_n)$ – wtedy wielomian minimalny α nad $k(x_1, \ldots, x_n)$ to:

$$0 = (X - (g + hz)) \cdot (X - (g - hz)) = X^2 - 2 \cdot g \cdot X + (g^2 - h^2 f)$$

Z całkowitości α wynika, że $2g \in A$, $g^2 - h^2 f \in A$. Stąd:

$$g \in A \cap k(x_1, \ldots, x_n) = k[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{oraz} \quad h^2 \cdot f \in A \cap k(x_1, \ldots, x_n) = k[x_1, \ldots, x_n]$$

Zauważmy jednak, że $k[x_1, \ldots, x_n]$ jest dziedziną z jednoznacznym rozkładem. Możemy więc rozłożyć h na iloczyn potęg nierozkładalnych wielomianów (z niekoniecznie dodatnimi wykładnikami). Korzystając z tego, że f jest bezkwadratowy stwierdzamy, że wszystkie wykładniki wielomianów nierozkładalnych w h są dodatnie oraz $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$.
Stąd $\alpha = g + hz \in A$.

2.6.5

(a) Wystarczy pokazać, że $k[x_0, \ldots, x_n]/(x_0^2 + \ldots + x_r^2)$ jest normalne. Ale to wynika z zadania 6.4. przyjmując $f = -x_1^2 - \ldots - x_r^2$, bo dla $r \geqslant 2$ wielomian ten jest bezkwadratowy.

(b) Mamy: $(x_0 + ix_1) \cdot (-x_0 + ix_1) = x_2^2 + \ldots + x_r^2$, więc wystarczy podstawić $x_0' := x_0 + ix_1$, $x_1' := -x_0 + ix_1$, aby dostać równanie wymaganej postaci.

  (1) W tym przypadku teza wynika bezpośrednio z Przykładu (6.5.2).

  (2) Krzywa jest w tym przypadku izomorficzna z krzywą $X : xy = zw$ w $\mathbb{A}^4$. Dla krzywej V zadanej tym samym równaniem w $\mathbb{P}^3$ mamy z przykładu (6.6.1) $Cl(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, zatem z zadania II.6.3 (b) mamy: $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to Cl(X) \to 0$. Pozostaje zidentyfikować pierwsze przekształcenie. Obraz $\mathbb{Z}$ w $Cl(Q)$ generowany jest np. przez $H.Q$, gdzie $H = \{w = 0\}$. Z przykładu 6.6.2 wynika, że $H.Q$ odpowiada elementowi $(1, 1)$ w $\mathbb{Z}$. Stąd:

$$Cl(X) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\{(n, n) \in \mathbb{Z}^2\}} \cong \mathbb{Z}.$$

  (3) Niech $Y = \{x_0 = 0\}$. Wtedy, podobnie jak w Przykładzie (6.5.2) mamy:

$$X \backslash Y = D(x_0) = Spec\, k[x_0, x_0^{-1}, \ldots, x_n]/(x_0 x_1 - x_2^2 - \ldots - x_r^2) =$$

$$Spec\, k[x_0, x_0^{-1}, \ldots, x_n]/(x_1 - x_0^{-1} \cdot (x_2^2 + \ldots + x_r^2)) =$$
$$Spec\, k[x_0, x_0^{-1}, x_2, \ldots, x_n]$$

zaś ostatni pierścień jest UFD, więc:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot Y} Cl(X) \to Cl(X \backslash Y) = 0$$

oraz pozostaje ustalić obraz Y. Wykażemy, że $div(x_0) = Y$. Zauważmy, że ideał (x_0) jest pierwszy w $A(X)$ (pierścieniu współrzędnych afinicznych na X) dla $r \geqslant 4$ – istotnie:

$$A(X)/(x_0) = k[x_0, \ldots, x_r]/(x_0x_1 - x_2^2 - \ldots - x_r^2) = \left(k[x_2, \ldots, x_r]/(x_2^2 + \ldots + x_r^2)\right)[x_1],$$

zaś $x_2^2 + \ldots + x_r^2$ jest nierozkładalny dla $r \geqslant 4$. To jednak oznacza, że $div(x_0) = Y$.

Fakt Jeżeli $f \in A(X)$ generuje ideał pierwszy $\mathfrak{p} = (f)$, to $div(f) = Y$, gdzie $Y = \{f = 0\}$.
Uzasadnienie: f nie należy oczywiście do żadnego ideału pierwszego wysokości 1 oprócz $\mathfrak{p}$. Z definicji wynika zaś, że f jest uniformizatorem w $S_{(\mathfrak{p})}$.

(c) (1) W tym przypadku $Q : xy = z^2$. Niech $k[\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}] = k[x, y, z]/(xy - z^2)$, zaś $P = [0 : 1 : 0]$. Wtedy:

$$Q \backslash \{P\} = D_+(x) = Spec\Big(k[\overline{y}/\overline{x}, \overline{z}/\overline{x}]\Big) \cong Spec(k[t]) \cong \mathbb{A}^1$$

(izomorfizmy dane są przez $t \mapsto \overline{z}/\overline{x}$ oraz $\overline{z}/\overline{x} \mapsto t$, $\overline{y}/\overline{x} \mapsto t^2$). Stąd z tego, że $Cl(\mathbb{A}^1) = 0$ oraz z ciągu dokładnego wycinania (Proposition II.6.5 (c)), $Cl(Q)$ jest grupą cykliczną, generowaną przez P. Musi to być nieskończona grupa cykliczna – wynika to np. z zadania II.6.3 (b).

(2) Teza wynika bezpośrednio z Przykładu (6.6.1).

(3) Teza wynika z ciągu dokładnego z zad. II.6.3 (b) oraz z zad. II.6.4 (b)(3).

(d) Zauważmy, że $k[x_0, \ldots, x_r]/(x_0^2 + \ldots + x_r^2)$ jest UFD. Istotnie, z podpunktu (a) wynika, że jest to pierścień normalny, zaś z (b)(3), że jego grupa klas zeruje się. Stąd jest to dziedzina z jednoznacznym rozkładem z Proposition II.6.2. Stąd także $S(Q) = k[x_0, \ldots, x_r]/(x_0^2 + \ldots + x_r^2)$ jest dziedziną z jednoznacznym rozkładem. Niech $Y \subset Q$ będzie podrozmaitością kowymiaru 1, odpowiadającą ideałowi $\mathfrak{q} \trianglelefteq S(Q)$ (jest to jednorodny ideał pierwszy wysokości 1). Z twierdzenia Proposition I.1.12A wynika, że $\mathfrak{q} = (f)$ jest ideałem głównym. Niech $V := \{f = 0\} \subset \mathbb{P}^n$. Wtedy z definicji wynika, że $V \cap Q = Y$. Ponadto $V.Q = div(f) = Y$ (krotność jest równa jeden, bo f generuje $\mathfrak{q}$). Stąd z zadania II.6.2 (c) $i(V, Q; Y) = 1$.

2.6.9

(a) Zauważmy, że $\pi^\# : \mathcal{O}_X \to \pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ jest iniekcją – wynika to z konstrukcji normalizacji jako sklejenia domknięć całkowitych podzbiorów afinicznych. Stąd $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}^*/\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ jest surjekcją; jej jądrem jest oczywiście $\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*$. Dostajemy stąd krótki ciąg dokładny:

$$0 \to \pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}^*/\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^* \to 0$$

Rozważmy snop $\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*$. Jest to snop torsyjny, tzn. ma zerowe źdźbło w punkcie generycznym ξ (jest ono równe K^*/K^*).

Lemat Jeżeli $\mathcal{T}$ jest snopem torsyjnym na schemacie jednowymiarowym, to $\mathcal{T} \cong \bigoplus_{x \in X} i_x(\mathcal{T}_x)$.
Dowód: Zauważmy, że $Hom(\mathcal{T}, i_x(\mathcal{T}_x)) = Hom(\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_x)$ (jako że funktor skyscraper oraz brania źdźbła są sprzężone), istnieje więc naturalny morfizm $\mathcal{T} \to i_x(\mathcal{T}_x)$. Stąd mamy również naturalny morfizm $\mathcal{T} \to \bigoplus_{x \in X} i_x(\mathcal{T}_x)$. Schemat X jest jednowymiarowy, zatem dla dowolnych punktów domkniętych x, y:

$$i_x(\mathcal{T}_x)_y = \begin{cases} \mathcal{T}_x, & y \in \overline{\{x\}} \\ 0, & y \notin \overline{\{x\}} \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{T}_x, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$$

Z torsyjności snopa mamy zaś dla dowolnego x: $i_\xi(\mathcal{T}_\xi)_x = 0$. Stąd odwzorowanie $\mathcal{T} \to \bigoplus_{x \in X} i_x(\mathcal{T}_x)$ jest izomorfizmem na źdźbłach, jest zatem izomorfizmem.

Z lematu wynika, że $\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}}/\mathcal{O}^*_X \cong \bigoplus_{P\in X} i_P\Big((\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}}/\mathcal{O}^*_X)_P\Big)$ – w szczególności snop ten jest wiotki (flabby – patrz zadanie II.1.16) oraz z zadania II.1.16 (b) ciąg

$$0 \to \Gamma(\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}}/\mathcal{O}^*_X, X) \to \Gamma(\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*_X, X) \to \Gamma(\mathcal{K}^*/\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}}, X) \to 0 \qquad (*)$$

jest dokładny. Zauważmy, że $\mathcal{K}^*/\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}} \cong \pi_*(\widetilde{\mathcal{K}}^*/\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}})$ (gdzie $\widetilde{\mathcal{K}}$ jest snopem funkcji wymiernych na $\widetilde{X}$). Stąd:

$$\Gamma(\pi_*(\widetilde{\mathcal{K}}^*/\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}}), X) = \Gamma(\widetilde{\mathcal{K}}^*/\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}}, \widetilde{X}) = Pic(\widetilde{X}).$$

Ponadto:

$$\Gamma(\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}}/\mathcal{O}^*_X, X) = \Gamma\bigg(\bigoplus_{P\in X} i_P\big((\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}}/\mathcal{O}^*_X)_P\big), X\bigg) = \bigoplus_{P\in X} (\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}})_P/\mathcal{O}^*_P.$$

Zauważmy jednak, że $(\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}})_P \cong \widetilde{\mathcal{O}}_P$. Istotnie, niech $Spec(A)$ będzie otwartym otoczeniem punktu P. Wtedy $\pi^{-1}(Spec(A)) = Spec(\widetilde{A})$, gdzie $\widetilde{A}$ jest domknięciem całkowitym A w $Frac(A)$ (z konstrukcji normalizacji) oraz $\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ jest quasikoherentym snopem na $Spec(A)$, wyznaczonym przez $\widetilde{A}$ traktowane jako A-moduł. Stąd $(\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}})_P = A_\mathfrak{p}$ (gdzie $\mathfrak{p}$ odpowiada punktowi P w $Spec(A)$) jest domknięciem całkowitym $\mathcal{O}_P$ w ciele ułamków. To daje również $(\pi_*\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}})_P = A^*_\mathfrak{p}$.

Ostatecznie z ciągu dokładnego $(*)$ dostajemy:

$$0 \to \bigoplus_{P\in X} \widetilde{\mathcal{O}}^*_P/\mathcal{O}^*_P \to Pic(X) \to Pic(\widetilde{X}) \to 0.$$

(b) **Krzywa z ostrzem:**

Krzywa X jest gładka poza punktem $Q = [0:1:0]$ – stąd $\widetilde{\mathcal{O}}^*_Q/\mathcal{O}^*_Q$ jest jedynym niezerowym wyrazem w sumie $\bigoplus_{P\in X} \widetilde{\mathcal{O}}^*_P/\mathcal{O}^*_P$.

Niech $k[\overline{x},\overline{y}] = k[x,y]/(y^2-x^3)$. Aby obliczyć $\widetilde{\mathcal{O}}^*_Q/\mathcal{O}^*_Q$, przypomnijmy, że z zadania I.4.10 wynika, że blowing-up krzywej $Y : y^2 = x^3$ to morfizm:

$$\mathbb{A}^1 = Spec(k[u]) \to Spec(k[\overline{x},\overline{y}]) = Y$$

wyznaczony przez homomorfizm (iniekcję):

$$k[\overline{x},\overline{y}] \to k[u], \qquad \overline{x} \longmapsto u^2, \quad \overline{y} \longmapsto u^3.$$

Morfizm ten przedłuża się do morfizmu $\mathbb{P}^1 \to X$, który jest normalizacją X. Stąd $Pic(\widetilde{X}) = \mathbb{Z}$.
Łatwo stąd wywnioskować, że:

$$\widetilde{\mathcal{O}}^*_Q = (k[u]_{(u)})^* \supset \mathcal{O}^*_Q = \left\{\frac{f(u^2,u^3)}{g(u^2,u^3)} : f,g \in k[x,y], \qquad f(0,0), g(0,0) \neq 0\right\}.$$

Rozważmy homomorfizm $k \to \widetilde{\mathcal{O}}^*_Q/\mathcal{O}^*_Q$, $a \mapsto 1+au$. Pokażemy, że jest to izomorfizm. Istotnie, jeżeli $1+au \in \mathcal{O}^*_Q$, to:

$$1+au = \frac{f(u^2,u^3)}{g(u^2,u^3)}$$

oraz licząc obustronnie pochodną w zerze dostajemy: $a = 0$. Pozostaje pokazać surjektywność. Wystarczy pokazać, że w obrazie znajdują się wszystkie wielomiany. Niech $h \in (k[u]_{(u)})^*$, bez straty ogólności $h(0) = 1$. Wtedy:

$$h(u) = 1 + au + F(u^2,u^3), \qquad \text{dla pewnego } F \in k[x,y].$$

Istotnie, każdy jednomian stopnia $\geqslant 2$ można zapisać w postaci $(u^2)^a \cdot (u^3)^b$ dla pewnych $a,b \in \mathbb{N}$. Stąd:

$$\begin{aligned} h(u) &= (1+au)\cdot\frac{1+au+F(u^2,u^3)}{1+au}\cdot\frac{1-au}{1-au} = (1+au)\cdot\frac{1-a^2\cdot u^2+\ldots}{1-a^2\cdot u^2} \\ &= (1+au)\cdot H(u^2,u^3) \equiv 1+au \pmod{\mathcal{O}^*_Q}. \end{aligned}$$

Stąd $\widetilde{\mathcal{O}}^*_Q/\mathcal{O}^*_Q \cong k$ oraz teza wynika z podpunktu (a).

Krzywa z węzłem: niech $X : y^2z = x^3 + x^2z$, $Y : y^2 = x^3 + x^2$, $k[\overline{x}, \overline{y}] = k[x, y]/(y^2 - x^3)$, $Q = (0, 0)$. Łatwo stwierdzić (podobnie jak w zadaniu I.4.10), że blowing-up Y w punkcie Q to morfizm:

$$\mathbb{A}^1 = Spec(k[w]) \to Spec(k[\overline{x}, \overline{y}])$$

indukowany przez homomorfizm:

$$k[\overline{x}, \overline{y}] \to k[w], \qquad \overline{x} \mapsto (w^2 - 1), \quad \overline{y} \mapsto w \cdot (w^2 - 1).$$

Morfizm ten przedłuża się do morfizmu $\mathbb{P}^1 \to X$, który jest normalizacją X. Stąd $Pic(\widetilde{X}) = \mathbb{Z}$.
Łatwo stąd wywnioskować, że:

$$\widetilde{\mathcal{O}}^*_Q = (k[w]_{(w-1)})^* \supset \mathcal{O}^*_Q = \left\{ \frac{f(w^2 - 1, w \cdot (w^2 - 1))}{g(w^2 - 1, w \cdot (w^2 - 1))} : f, g \in k[x, y], \right.$$

$$\left. f(0, 0), g(0, 0) \neq 0 \right\}.$$

Rozważmy przyporządkowanie $k^* \to \widetilde{\mathcal{O}}^*_Q/\mathcal{O}^*_Q$, $a \mapsto 1 + w + a \cdot (1 - w)$. Pokażemy, że jest to izomorfizm. Istotnie, jeżeli $1 + w + a \cdot (1 - w) \in \mathcal{O}^*_Q$, to:

$$1 + w + a \cdot (1 - w) = h(w^2 - 1, w \cdot (w^2 - 1)) \qquad \text{dla pewnej funkcji wymiernej } h.$$

Podstawiając $w = \pm 1$ dostajemy: $2 = h(0, 0) = 0 + 2 \cdot a$, więc $a = 1$.
Pozostaje pokazać surjektywność oraz homomorficzność. Wystarczy pokazać, że w obrazie znajdują się wszystkie wielomiany.

Lemat Jeżeli $h \in k[w]^*_{(w-1)}$, $h(1) = h(-1)$, to $h(w) = H(w^2 - 1, w \cdot (w^2 - 1))$ dla pewnego $H \in k(x, y)$.
Dowód: Załóżmy najpierw, że $h \in k[w]$. Rozłóżmy h na część parzystą i nieparzystą:

$$h(w) = h_1(w^2) + w \cdot h_2(w^2) = h_3(w^2 - 1) + w \cdot h_4(w^2 - 1)$$

(gdzie $h_3(x) = h_1(x + 1)$, $h_4(x) = h_2(x + 1)$) . Podstawiając $w = \pm 1$ widzimy, że $h_4(0) = 0$, czyli $h_4(x) = x \cdot h_5(x)$. Stąd:

$$h(w) = h_3(w^2 - 1) + w \cdot (w^2 - 1) \cdot h_5(w^2 - 1) = H(w^2 - 1, w \cdot (w^2 - 1)).$$

Niech teraz $h = f/g$ oraz $h(1) = h(-1)$. Niech $l(w)$ będzie taką funkcją liniową, że $l(1) = g(-1)$, $l(-1) = g(1)$. Wtedy $(l \cdot f)(1) = (l \cdot f)(-1)$, $(l \cdot g)(1) = (l \cdot g)(-1)$, więc wystarczy skorzystać z pierwszej części dowodu dla $l \cdot f$, $l \cdot g$.

Niech $h \in (k[w]_{(w-1)})^*$, bez straty ogólności $h(1) = 2$. Wtedy z **lematu** dla $a = \frac{1}{2}h(-1)$:

$$h(w)/(1 + w + a \cdot (1 - w)) = H(w^2 - 1, w \cdot (w^2 - 1)) \qquad \text{dla pewnego } H.$$

Stąd:

$$h(w) \equiv (1 + w + a \cdot (1 - w)) \pmod{\mathcal{O}^*_X}.$$

Analogicznie sprawdzamy, że:

$$(1 + w + a \cdot (1 - w)) \cdot (1 + w + b \cdot (1 - w)) \equiv (1 + w + (a + b) \cdot (1 - w)) \pmod{\mathcal{O}^*_X}.$$

2.6.10

(a) Snopy koherentne na $\mathbb{A}^1_k$ odpowiadają skończenie generowanym $k[x]$-modułom M.Pierścień $k[x]$ jest PID, więc każdy skończenie generowany moduł jest postaci $M \cong k[x]^r \oplus M_{tors}$, gdzie M_{tors} jest sumą modułów postaci $k[x]/(f(x))$ dla pewnych $f \in k[x]$. Zauważmy, że dla $f \neq 0$: $\gamma(k[x]/(f(x))) = 0$. Istotnie:

$$0 \to f(x)k[x] \to k[x] \to k[x]/(f(x)) \to 0$$

oraz $f(x)k[x] \cong k[x]$. Stąd $\gamma(k[x]/(f(x))) = \gamma(k[x]) - \gamma(f(x)k[x]) = 0$, co daje:

$$\gamma(M) = \gamma(k[x]^r \oplus M_{tors}) = r \cdot \gamma(k[x])$$

Stąd odwzorowanie $\mathbb{Z} \to K(\mathbb{A}^1_k)$, $1 \mapsto \gamma(k[x])$ jest surjekcją. Aby pokazać, że jest iniekcją, wystarczy zauważyć, że ranga $k[x]$-modułu jest addytywna na ciągach dokładnych, zatem $\ker(\mathbb{Z} \to K(\mathbb{A}^1_k)) = 0$ (patrz też podpunkt (b)).

(b) jeżeli $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$, to $0 \to \mathcal{F}'_\xi \to \mathcal{F}_\xi \to \mathcal{F}''_\xi \to 0$ oraz z addytywności wymiaru przestrzenii K-liniowych $\dim_K \mathcal{F}_\xi = \dim_K \mathcal{F}'_\xi + \dim_K \mathcal{F}''_\xi$. To oznacza, że $rank : K(X) \to \mathbb{Z}$ jest dobrze zdefiniowane.

(c) Niech $\mathcal{F}$ będzie koherentnym snopem takim, że $Supp(\mathcal{F}) \subset Y$ oraz niech $\mathcal{I} := \mathcal{I}_Y$ będzie snopem ideałów związanym z podschematem domkniętym Y. Niech $\mathcal{F}_k := \mathcal{I}^k \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$. Wtedy $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supseteq \mathcal{F}_1 \supseteq \ldots$. Ponadto $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1} = (\mathcal{I}^k \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})/(\mathcal{I}^{k+1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$ w jasny sposób jest $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$-modułem. Pozostaje pokazać, że $\mathcal{F}_k = 0$ dla dostatecznie dużych k. Zauważmy, że zbiory $Supp(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1})$ są domknięte (zadanie II.5.6 (c)) oraz wstępujące – jeżeli $x \notin Supp(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1})$, to $(\mathcal{F}_k)_x = (\mathcal{F}_{k+1})_x$, to dotensorowując przez $\mathcal{I}_x$ dostajemy $(\mathcal{F}_{k+1})_x = (\mathcal{F}_{k+2})_x$, czyli $x \notin Supp(\mathcal{F}_{k+1}/\mathcal{F}_{k+2})$. Z Noetherowskości schematu X ciąg ten musi się stabilizować, tzn. $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k+1} = \mathcal{F}_k \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}$ dla $k \geqslant k_0$.
Zauważmy, że dla $y \in Y$ mamy: $\mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{X,y}/\mathcal{I}_x$, zatem ideał I_y pierścienia $\mathcal{O}_{X,y}$ jest różny od 1. Ale $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}$ implikuje dla $y \in Y$, że $(\mathcal{F}_k)_y = \mathcal{I}_y \cdot (\mathcal{F}_k)_y$, zatem z lematu Nakayamy mamy $(\mathcal{F}_k)_y = 0$. Dla $x \in X \backslash Y$ mamy $(\mathcal{F}_k)_x = 0$ z założenia. Stąd $\mathcal{F}_k = 0$.
Stąd:

$$0 \to \mathcal{F}_{j+1} \to \mathcal{F}_j \to \mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j+1} \to 0$$

więc $\gamma(\mathcal{F}_j) = \gamma(\mathcal{F}_{j+1}) + \gamma(\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j+1})$ oraz:

$$\gamma(\mathcal{F}) = \gamma(\mathcal{F}_1) + \gamma(\mathcal{F}_0/\mathcal{F}_1) = \gamma(\mathcal{F}_2) + \gamma(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2) + \gamma(\mathcal{F}_0/\mathcal{F}_1) = \ldots =$$

$$= \gamma(\mathcal{F}_{k_0-1}/\mathcal{F}_{k_0}) + \ldots + \gamma(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2) + \gamma(\mathcal{F}_0/\mathcal{F}_1) \in im\,(K(Y) \to K(X\backslash Y))$$

dowodząc dokładności ciągu w środku.

ad. Surjektywność: wynika z zadania II.5.15, biorąc $U := X\backslash Y$.

2.6.11

(a) Let us notice that $\mathcal{O}_D$ is a torsion sheaf. Thus by the **lemma** from the problem II.6.9 (a), we have: $\mathcal{O}_D \cong \bigoplus_{P\in X} i_P(\mathcal{O}_{D,P})$. Let us notice that:

$$\mathcal{L}(-D)(U) = \{f \in K^* : div(f|_u) \geqslant D|_U\} \cup \{0\}$$

and therefore $\mathcal{L}(-D)_P = t_P^{n_P}\mathcal{O}_{X,P}$ (where t_P is an uniformizer at P) and $\mathcal{O}_{D,P} = \mathcal{O}_{X,P}/t_P^{n_P}$. Let $A = \mathcal{O}_{X,P}$, $t = t_P$. From the exact sequence:

$$0 \to t^{n-1}A/t^nA \to A/t^n \to A/t^{n-1} \to 0$$

and isomorphism of A-modules:

$$t^{n-1}A/t^nA \cong A/t \cong k$$

we get: $\gamma(i_P(A/t^{n_P})) = n_P \cdot \gamma(i_P(k))$. Thus:

$$\gamma(\mathcal{O}_D) = \sum_P \gamma(i_P(\mathcal{O}_{D,P})) = \sum_P n_P\gamma(i_P(k)) = \psi(D).$$

Moreover $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_X/\mathcal{L}(-D)$ and thus $\gamma(\mathcal{O}_D) = \gamma(\mathcal{O}_X) - \gamma(\mathcal{L}(-D))$. But the isomorphism class of $\mathcal{L}(-D)$ depends only on the class of D in $Cl(X)$. Thus $\psi : Cl(X) \to K(X)$ is well-defined.

(b) **Part I: existence of locally free resolution of length 2.**

From the problem III.6.8 (b) there exists a locally free sheaf $\mathcal{E}_0$ such that $\mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \to 0$ (this $\mathcal{E}_0$ can be taken to be direct sum of invertible sheaves). Let $\mathcal{E}_1 := \ker(\mathcal{E}_0 \to \mathcal{F})$. We have to show that $\mathcal{E}_1$ is locally free. For every $x \in X$ the $\mathcal{O}_{X,x}$-module $(\mathcal{E}_1)_x$ is a submodule of the module $(\mathcal{E}_0)_x$ that is free of rank 1. Thus $(\mathcal{E}_1)_x$ is torsion-free. But $\mathcal{O}_{X,x}$ is a discrete valuation ring and finitely generated torsion-free modules over DVRs are free. Thus the stalks of $(\mathcal{E}_1)_x$ are free and $\mathcal{E}_1$ is locally free.

Part II: det **is well-defined**

Suppose that both

$$0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{g} \mathcal{F} \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to \mathcal{E}_1' \to \mathcal{E}_0' \xrightarrow{g'} \mathcal{F} \to 0$$

are locally free resolutions of $\mathcal{F}$. Firstly, we construct a locally free resolution that surjects to both above sequences. Let:

$$\mathcal{E}_0''(U) := \{(a,b) \in \mathcal{E}_0(U) \times \mathcal{E}_0'(U) : g(a) = g'(b)\}$$

$$\mathcal{E}_1''(U) := \{(a,b) \in \mathcal{E}_0(U) \times \mathcal{E}_0'(U) : g(a) = g'(b) = 0\}$$

(note that fiber products in category of sheaves exist – cf. http://math.stackexchange.com/questions/92485/fiber-product-of-sheaves) and let us define the following exact sequence:

$$0 \to \mathcal{E}_1'' \to \mathcal{E}_0'' \to \mathcal{F} \to 0$$

where the first arrow is natural inclusion and the second is $g \circ pr_1 = g' \circ pr_2$. Then we have the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & K_1 \arrow[d] & K_0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_1'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}_0'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

where $K_0 := \ker(\mathcal{E}_0'' \to \mathcal{E}_0)$, $K_1 := \ker(\mathcal{E}_1'' \to \mathcal{E}_1)$. By applying the snake lemma, we see that $K_0 \cong K_1$. Note that K_0, K_1 are locally free . Thus by Problem II.5.16(d) we see that:

$$\det \mathcal{E}_1'' \cong \det K_1 \otimes \det \mathcal{E}_1, \qquad \det \mathcal{E}_0'' \cong \det K_0 \otimes \det \mathcal{E}_0$$

$$\Rightarrow \qquad \det \mathcal{E}_1'' \otimes (\det \mathcal{E}_1)^{-1} \cong \det \mathcal{E}_0'' \otimes (\det \mathcal{E}_0)^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \det \mathcal{E}_0'' \otimes (\det \mathcal{E}_1'')^{-1} \cong \det \mathcal{E}_0 \otimes (\det \mathcal{E}_1)^{-1}.$$

Analogously $\det \mathcal{E}_0'' \otimes (\det \mathcal{E}_1'')^{-1} \cong \det \mathcal{E}_0' \otimes (\det \mathcal{E}_1')^{-1}$.

Part III: The equality $\det(\psi(D)) = \mathcal{L}(D)$ follows from an exact sequence $0 \to \mathcal{L}(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$.

(c) Let $x_1 \in \mathcal{F}(U_1), \ldots, x_r \in \mathcal{F}(U_r)$ be the basis of $\mathcal{F}_\xi \cong K^r$ (where ξ is the generic point of X). By the problem III.6.8 (a) there exists an invertible sheaf $\mathcal{L}$ and $s \in \mathcal{L}$ such that $X_s := \{x \in X : s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x\} \subset U_1 \cap \ldots \cap U_r$. WLOG we have $x_i \in \mathcal{F}(X_s)$ By Lemma II.5.3 $s^n x_i$ extends to some $y_i \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)(X)$ for n big enough. We will show that $\mathcal{O}_X^{\oplus r} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ given by $e_i \mapsto y_i$ is iniective. Indeed let's suppose that $\sum_i a_i y_i = 0$ in $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_x$ for some $x \in X$ and $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$. Using the natural map $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)_x \to (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})_\xi$ we see that $\sum_i a_i y_i = 0$ in $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)_\xi$ and (since $s \neq 0$ in $\mathcal{L}_\xi$) $\sum_i a_i x_i = 0$. Thus $a_i = 0$ for all i's (note that X is integral and therefore $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$).
This means that $\mathcal{O}_X^{\oplus r} \hookrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$. But tensoring by an invertible sheaf is exact (since the stalks are isomorphic to $\mathcal{O}_{X,x}$, the tensoring is exact on stalks). This yields $(\mathcal{L}_1)^{\oplus r} \hookrightarrow \mathcal{F}$, where $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^{-\otimes n}$. Finally, the quotient sheaf $\mathcal{T} := \mathcal{F}/(\mathcal{L}_1)^{\oplus r}$ is torsion, since $\mathcal{T}_\xi = K^r/K^r = K^0$.

Thus $\gamma(\mathcal{F}) = \gamma(\mathcal{T}) + r \cdot \gamma(\mathcal{L}_1)$. But $\gamma(\mathcal{L}_1) = \gamma(\mathcal{O}_X) - \psi(D_1)$, where $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(D_1)$. Moreover, all torsion sheaves lie in the image of ψ (since they are sums of skyscraper sheaves). This means that $\gamma(\mathcal{F}) - r\gamma(\mathcal{O}_X) \in Im(\psi)$.

(d) Firstly, let us notice that $\psi : Pic(X) \to K(X)$ is iniective. Indeed, if $\psi(D_1) = \psi(D_2)$, then by taking det we see that $\mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$ and thus $D_1 \sim D_2$.

Thus we have an exact sequence $0 \to Pic(X) \to K(X) \to \mathbb{Z} \to 0$, where the first arrow is ψ and the second is $rank$. Indeed, clearly $rank(\psi(D)) = rank(\mathcal{O}_D) = 0$ – thus $im(\psi) \subset \ker(rank)$. Let $\sum_i n_i\gamma(\mathcal{F}_i) \in \ker(rank)$ and let $r_i := rank(\mathcal{F}_i)$. Then we have $\sum_i n_i r_i = 0$. Thus $\sum_i n_i\gamma(\mathcal{F}_i) = \sum_i n_i(\gamma(\mathcal{F}_i) - r_i\gamma(\mathcal{O}_X)) \in im(\psi)$ by (c). Finally, the considered exact sequence has a section $\mathbb{Z} \to K(X)$, $1 \mapsto \gamma(\mathcal{O}_X)$. Thus it splits.

2.6.12 Let $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf that satisfies $0 \to \mathcal{L}(D)^{\oplus r} \to \mathcal{F} \to \mathcal{T} \to 0$ (where $\mathcal{T}$ is a torsion sheaf and $r = rank(\mathcal{F})$) – cf. previous problem (c). Then we define:

$$\deg \mathcal{F} := r \cdot deg(D) + \Phi(\mathcal{T}),$$

where $\Phi(\mathcal{T}) = \sum_{P \in X} lenght(\mathcal{T}_P)$. This is independent from the choice of the exact sequence. Indeed, let $0 \to \mathcal{L}(D')^{\oplus r} \to \mathcal{F} \to \mathcal{T}' \to 0$. It's easy to see that $\mathcal{L}(D_1) \hookrightarrow \mathcal{L}(D_2)$ for $D_1 \leqslant D_2$. Thus (by replacing D' with any divisor smaller that D, D'), we can assume that $D' \leqslant D$ and $\mathcal{L}(D') \hookrightarrow \mathcal{L}(D)$. Then:

$$0 \to \mathcal{L}(D)^{\oplus r}/\mathcal{L}(D')^{\oplus r} \to \mathcal{F}/\mathcal{L}(D')^{\oplus r} \to \mathcal{F}/\mathcal{L}(D)^{\oplus r} \to 0$$

and therefore:

$$\Phi(\mathcal{F}/\mathcal{L}(D')^{\oplus r}) = \Phi(\mathcal{F}/\mathcal{L}(D)^{\oplus r}) + \Phi(\mathcal{L}(D)^{\oplus r}/\mathcal{L}(D')^{\oplus r})$$

Let $D = \sum_P n_P P$, $D' = \sum_P m_P P$ and let t_P be a uniformizer at P. Using the equality:

$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in K : div(f|_U) + D_U \geqslant 0\}$$

it's straightforward that $\mathcal{L}(D)_P = t^{-n_P}\mathcal{O}_P$ (as a $\mathcal{O}_P$-submodule of K). Thus

$$lenght(\mathcal{L}(D)_P/\mathcal{L}(D')_P) = lenght(\mathcal{O}_P/t_P^{n_P - m_P}) = n_P - m_P$$

and:

$$\Phi(\mathcal{F}/\mathcal{L}(D')^{\oplus r}) = \Phi(\mathcal{F}/\mathcal{L}(D)^{\oplus r}) + r \cdot (\deg D - \deg D').$$

This yields $r \cdot deg(D) + \Phi(\mathcal{T}) = r \cdot deg(D') + \Phi(\mathcal{T}')$.

Remark: an equivalent way to define degree is to set: $deg(\mathcal{F}) := deg(\det \mathcal{F})$ (where $\det \mathcal{F}$ is defined as in problem II.6.11 (b)).

Podrozdział 2.7

2.7.1 By looking at stalks we see that it suffices to prove the following theorem:

If A is a local ring and $f : A \to A$ is a surjective homomorphism of A-modules then it is injective.

Indeed, if $f(1) \in \mathfrak{m}$ (where $\mathfrak{m}$ – maximal ideal of A) then we would have $f(A) = Af(1) \subset \mathfrak{m} \subsetneq A$ – contradiction. Thus $f(1) \in A \backslash \mathfrak{m} = A^\times$ and $a \in \ker f$ iff $a \cdot f(1) = 0$ iff $a = 0$. Thus $\ker f = 0$.

2.7.4

(a) Let us suppose that X admits an ample invertible sheaf $\mathcal{L}$. Then by Theorem II.7.6 $\mathcal{L}^m$ is very ample for some $m > 0$ and therefore there exists an closed immersion $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$. Let $\pi_1 : X \to Spec(A), \pi_2 : \mathbb{P}^n_A \to Spec(A)$ be the structure morphisms of X and $\mathbb{P}^n_A$. Then $\pi_1 = \pi_2 \circ i$. But π_2 is separated (Theorem II.4.9) and i also (as a closed immersion), thus their composition is also separated.

(b) Let α, β be the two points at the orgin. Let $U_1 = X\backslash\{\beta\}$, $U_2 = X\backslash\{\alpha\}$, $V := U_1 \cap U_2$. Note that $U_1, U_2 \cong \mathbb{A}^1_k = Spec(k[x])$ and $V = \mathbb{A}^1_k\backslash\{(0,0)\} = D(x) = Spec(k[x]_x)$. Thus for any invertible sheaf $\mathcal{L}$ over X we have $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$. Therefore any invertible sheaf over X is given by an automorphism of $\mathcal{O}_V$, i.e. by an element of $k[x]_x^\times = \{c \cdot x^n : n \in \mathbb{N}, c \in k\}$ (note that $Hom(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_V) = \mathcal{O}_V(V)$ and $Aut(\mathcal{O}_V) = \mathcal{O}_V(V)^\times$). Let us define the sheaf $\mathcal{L}^{(n)}$ by:

$$\mathcal{L}^{(n)}|_{U_1} = \mathcal{O}_{U_1}, \qquad \mathcal{L}^{(n)}|_{U_2} = x^n\mathcal{O}_{U_2}$$

(note that on V we have a natural isomorphism $\mathcal{O}_V \cong x^n\mathcal{O}_V$). It's straightforward that $Pic(X) = \{\mathcal{L}^{(n)} : n \in \mathbb{Z}\}$ and $\mathcal{L}^m \otimes \mathcal{L}^{(n)} \cong \mathcal{L}^{m+n}$.

Now we are going to compute the global sections of $\mathcal{L}^{(n)}$. Note that:

$$0 \to \mathcal{L}^{(n)}(X) \to \mathcal{L}^{(n)}(U_1) \times \mathcal{L}^{(n)}(U_2) \to \mathcal{L}(V)$$

$$\begin{array}{rcl} 0 \to \mathcal{L}^{(n)}(X) \to k[x] \times x^n k[x] & \to & k[x]_x \\ (f,g) & \mapsto & f - g \end{array}$$

and therefore:

$$\mathcal{L}^{(n)}(X) = k[x] \cap x^n k[x] = \begin{cases} x^n k[x], & n \geqslant 0 \\ k[x], & n < 0. \end{cases}$$

Note that:

$$\mathcal{L}^{(n)}_\alpha = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,(0,0)} = k[x]_{(x)} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{L}^{(n)}_\beta = x^n\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,(0,0)} = x^n k[x]_{(x)}.$$

Thus for $n > 0$ the stalk $\mathcal{L}^{(n)}_\alpha$ isn't generated by global sections. Analogously for $n < 0$ the stalk $\mathcal{L}^{(n)}_\beta$ isn't generated by global sections.

Therefore the homomorphism $\mathbb{Z} \to Pic(X)$, $n \mapsto \mathcal{L}^{(n)}$ is bijective (since for $n \neq 0$ the sheaf $\mathcal{L}^{(n)}$ isn't generated by global sections) and moreover there are no ample invertible sheaves on X. Indeed, if $\mathcal{L}^{(m)}$ would be ample, then for some $n > 0$: $(\mathcal{L}^{(m)})^{\otimes n} = \mathcal{L}^{(mn)}$ would be generated by global sections, which is possible only for $mn = 0$. But $\mathcal{L}^{(0)} \cong \mathcal{O}_X$ is not ample, since $\mathcal{L}^{(0)} \otimes \mathcal{L}^{(1)} \cong \mathcal{L}^{(1)}$ is not generated by global sections.

2.7.6

(a) WLOG we can assume that $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. Let S be the homogeneous coordinates ring of X. Then for $n \gg 0$: $\Gamma(X, \mathcal{O}(n)) = S(n)$ (this follows from exercise II.5.9 and Proposition II.5.15). Therefore for $n \gg 0$:

$$|nD| = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}^n) - 1 = \dim_k S(n) - 1 = P_X(n) - 1$$

by definition of Hilbert polynomial.

(b) Note that if $r|n$: $\mathcal{L}^n \cong \mathcal{O}_X$ and thus $\dim |nD| = \dim \mathcal{L}(X) - 1 = 0$.

We'll prove that if D is a non-zero torsion element of $Pic(X)$ then $\dim \mathcal{L}(X) = 0$. Indeed, note that $r \cdot D = 0$ and thus $0 = r \cdot \deg D$, yielding $\deg D = 0$.

$$\mathcal{L}(U) = \{f \in K^\times : div(f)|_U + D|_U \geqslant 0\} \cup \{0\}.$$

If we would have $\mathcal{L}(X) \neq 0$, then $div(f_0) + D \geqslant 0$ for some $f_0 \in K^*$. But the divisor $div(f_0) + D$ would be effective of degree zero and thus $div(f_0) + D = 0$, $D \sim 0$ – contradiction! Thus $\mathcal{L}(X) = 0$.

Thus also $\mathcal{L}^{\otimes n}(X) = 0$ for $r \nmid n$ (it suffices to apply previous reasoning for $\mathcal{L}' := \mathcal{L}^{\otimes n}$).

2.7.8 By Proposition II.7.12 (with $Y = X$, $g = id$) we have:

sections $\sigma : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ $\leftrightarrow$ invertible sheaves $\mathcal{L}$ on X and surjective maps of sheaves $g^*\mathcal{E} = \mathcal{E} \to \mathcal{L}$.

2.7.9

Remark I don't know, how to do (a) without using chapter III.
Used sources:

- *http://mathoverflow.net/q/61053* – "Picard Group of Projective Bundle over an Integral scheme",
- *http://math.stackexchange.com/questions/598446/how-to-use-nakayamas-lemma-here*,
- *http://math.stackexchange.com/questions/1774106/line-bundle-trivial-on-fibers-then-isomorphic-to-the-pullback-of-a-line-bundle*,
- Milne, Abelian Varieties, 5.8-5.16,
- Ravi Vakil, Foundations of Algebraic Geometry, 28.1.12. Projective bundles.

(a) Let $Z = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $r =$ rank of $\mathcal{E}$. For any $x \in X$ we denote by Z_x the fiber of π: $Z_x := Z \times_X Spec(k(x))$.

Step I: for any $\mathcal{M} \in Pic(Z)$ the degree of $\mathcal{M}|_{Z_x}$ on $Z_x = \mathbb{P}^r_{k(x)}$ do not depend from $x \in X$. We denote it by $n(\mathcal{M})$.

Suppose that $\mathcal{M}|_{Z_x}$ has degree n for some x_0 then $\mathcal{L} := \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(-n)$ has degree 0 in this x_0. It's easy to see that $\mathcal{L}$ is flat over X (since the stalks are free modules of rank 1 and $\mathbb{P}^r_A \to Spec(A)$ is flat) and thus by [Ravi Vakil, 24.7 Flatness implies constant Euler characteristic] $\chi(\mathcal{L}|_{Z_x}) = \chi(\mathcal{L}|_{Z_{x_0}}) = 1$ is constant. On the other hand

$$1 = \chi(\mathcal{L}|_{Z_x}) = h^0(Z_x, \mathcal{L}|_{Z_x}) + (-1)^r h^r(Z_x, \mathcal{L}|_{Z_x})$$

(by Theorem III.5.1 that computes the cohomology of line bundles on $\mathbb{P}^r$). Also by this theorem $\mathcal{L}|_{Z_x}$ is $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ or $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-r-1)$ (the canonical bundle). However, $x \mapsto h^0(Z_x, \mathcal{L}|_{Z_x})$ is an upper semicontinuous function that can take two values (0 and 1) and thus the set $\{x : h^0(Z_x, \mathcal{L}|_{Z_x}) \geqslant 1\}$ is open. Analogously the set $\{x : h^0(Z_x, \mathcal{L}^{-1}|_{Z_x}) \geqslant 1\}$ is open and thus $\{x : h^0(Z_x, \mathcal{L}|_{Z_x}) \geqslant 1\}$ is both open and closed. This means that $\mathcal{L}|_{Z_x} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ and thus $\mathcal{M}|_{Z_x} = \mathcal{O}(n)$ for any $x \in X$.

Step II: defining the isomorphisms.

The isomorphisms are given by:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z} \times Pic(X) &\to Pic(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \\ (n, \mathcal{L}) &\longmapsto \pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi : Pic(\mathbb{P}(\mathcal{E})) &\to \mathbb{Z} \times Pic(X) \\ \mathcal{M} &\longmapsto \Big(n(\mathcal{M}), \pi_*\big(\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(-n(\mathcal{M}))\big)\Big). \end{aligned}$$

Step III: Φ is a well-defined homomorphism: pullback of an invertible sheaf is invertible
(cf. *http://math.stackexchange.com/q/436524*).

Step IV: Ψ is a well-defined: Let $n := n(\mathcal{M})$, $\mathcal{L} := \mathcal{M} \otimes O(-n)$. We want to show that $\pi_*\mathcal{L}$ is invertible. Note that $\mathcal{L}|_{Z_x} = \mathcal{O}$ on $Z_x = \mathbb{P}^r_{k(x)}$ and thus the function $x \mapsto h^0(Z_x, \mathcal{M}|_{Z_x})$ is constant. Therefore by Grauert's theorem $\pi_*\mathcal{M}$ is locally free and $\pi_*\mathcal{L} \otimes k(y) \cong \Gamma(Z_y, \mathcal{F}|_{X_y}) \cong k(y)$ for any $y \in X$. Thus rank of $\mathcal{L}$ must be 1.

Remark: we don't show that Ψ is a homomorphism, but it will follow once we show $\Psi \circ \Phi = id$, $\Phi \circ \Psi = id$.

Step V: $\Psi \circ \Phi = id$**.** Let's assume WLOG that $n \geqslant 0$. Then:

$$n(\pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(n)) = rank(\pi_*(\pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(n))) =$$

(by Projection Formula – exercise II.5.1 (d) and Proposition II.7.11 (a))

$$= rank(\mathcal{L} \otimes S^n(\mathcal{E})) = n$$

and $\pi_*(\pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(-n)) = \pi_*\pi^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$ by Projection Formula again. Thus $\Psi \circ \Phi = id$.

Step VI: $\Phi \circ \Psi = id$**.** We need to show that

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{O}(n) \otimes \pi^*\pi_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(-n))$$

(for $n = n(\mathcal{M})$) ie. that the counit morphism $\pi^*\pi_*\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (where $\mathcal{L} := \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(-n)$) is an isomorphism. By exercise II.7.1 it suffices to prove that the counit morphism is surjective.

Lemma Let $(A, \mathfrak{m})$ be a local ring with residue field $k := A/\mathfrak{m}$ and $f : M \to N$ be a morphism of A-modules. Suppose that $f : M \otimes_A k \to N \otimes_A k$ is surjective. Then f is surjective.
Proof WLOG $M \subset N$ – then $M/\mathfrak{m}M \cong N/\mathfrak{m}N$ and thus $M \to N/\mathfrak{m}N$ is a surjection. Therefore $N = M + \mathfrak{m}N$ and thus:

$$\mathfrak{m}(N/M) = (\mathfrak{m}N + M)/M = N/M$$

Thus by Nakayama's lemma $N = M$.
Corollary Let $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ be a sheaf morphism between coherent sheaves. If for every $x \in X$ the morphism $\alpha : \mathcal{F}|_x \to \mathcal{G}|_x$ is surjective then α is surjective.
Remark: $\mathcal{F}|_x := \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$ is called **the fiber of sheaf $\mathcal{F}$ at X** – it can be also defined as pullback of $\mathcal{F}$ through $Spec(k(x)) \hookrightarrow X$.

Claim: the counit morphism $\pi^*\pi_*\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ induces an isomorphism on every fiber of π, i.e. for every $x \in X$: $(\pi^*\pi_*\mathcal{L})|_{Z_y} \to \mathcal{L}|_{Z_y}$ is an isomorphism.

Proof of the claim: note that $Z_y = \mathbb{P}^r_{k(y)}$ and $\mathcal{L}_{X_y} = \mathcal{O}_{X_y}$. Let $\pi' : \mathbb{P}^n_{k(y)} \to Spec(k(y))$ – then $(\pi^*\pi_*\mathcal{L})|_{Z_y} = \pi'^*\pi'_*\mathcal{L}|_{Z_y}$ (cf. *http://math.stackexchange.com/q/1781651*). Thus it suffices to notice that $\pi'_*\mathcal{L}_{Z_y} = \mathcal{O}_{Spec(k(y))}$ and $\pi'^*(\mathcal{O}_{Spec(k(y))}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ (pullback of the structure sheaf is the structure sheaf).

The claim implies that for any $z \in X_y$ the morphism $(\pi^*\pi_*\mathcal{L})|_z \to \mathcal{L}|_z$ is an isomorphism (since $\mathcal{F}|_z = (\mathcal{F}|_{X_y})_z \otimes_{\mathcal{O}_{X_y,z}} k(z)$). Thus the counit isomorphism is an isomorphism by the **corollary**.

(b) If $\mathcal{E}' \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$, then one easily sees that $S^k(\mathcal{E}') \cong S^k(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}^k$ and $S(\mathcal{E}') = S(\mathcal{E}) * \mathcal{L}$. Thus by Lemma II.7.9 $\mathbb{P}(\mathcal{E}') \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$.

Suppose now that $\Phi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ is an isomorphism. Then $\Phi^*\mathcal{O}(1)$ is an invertible sheaf and thus by (a): $\Phi^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(k) \otimes \pi^*\mathcal{L}$ for some invertible sheaf $\mathcal{L}$ on X. Thus:

$$\pi_*\Phi^*\mathcal{O}(1) \cong \pi_*(\mathcal{O}(k) \otimes \pi^*\mathcal{L})$$

Using Projection Formula (exercise II.5.1 (d)):

$$\pi_*\Phi^*\mathcal{O}(1) \cong \pi_*(\mathcal{O}(k)) \otimes \mathcal{L}$$

Using Proposition II.7.11 (a):

$$\pi_*\Phi^*\mathcal{O}(1) \cong S^k(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}$$

Since $\pi = \pi' \circ \Phi$:

$$\pi'_* \circ \Phi_* \circ \Phi^*\mathcal{O}(1) \cong S^k(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}$$

Again by Projection Formula $\Phi_* \circ \Phi^* \mathcal{O}(1) \cong \Phi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \otimes O(1) \cong O(1)$. Thus:

$$\pi'_* \mathcal{O}(1) \cong S^k(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}$$

$$\mathcal{E}' \cong S^k(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}$$

By comparing ranks of the locally free sheaves on both sides we see that $k = 1$ and $\mathcal{E}' \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$.

2.7.12 Let $\mathcal{J} = \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z$. Note that $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$. It's easy to see that $i^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_Y = \overline{\mathcal{J}}$ (the natural image of $\mathcal{J}$ in the quotient sheaf of rings $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$) and thus $\tilde{Y} = \mathbf{Proj}(\bigoplus_{d \geqslant 0} \overline{\mathcal{J}}^d)$. Thus:

$$\mathcal{I}_{\tilde{Y}} = \ker\left(\bigoplus_{d \geqslant 0} \mathcal{J}^d \to \bigoplus_{d \geqslant 0} \overline{\mathcal{J}}^d\right) = \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Y.$$

Analogously $\mathcal{I}_{\tilde{Z}} = \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Z$. By a relative version of Exercise 1.2.2 it suffices to prove that $\mathcal{I}_{\tilde{Y}} + \mathcal{I}_{\tilde{Z}}$ contains the irrelevant ideal, ie.

$$\bigoplus_{d \geqslant 0} (\mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Y + \mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Z) \supset \bigoplus_{d \geqslant 1} \mathcal{J}^d$$

ie. that $\mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Y + \mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Z \supset \mathcal{J}^d$ for every $d \geqslant 1$.
Note that

$$\mathcal{J}^d = (\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z)^d = \sum_{i+j=d} \mathcal{I}_Y^i \mathcal{I}_Z^j.$$

Thus:

$$\mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Y \supset \mathcal{I}_Y^d + \mathcal{I}_Y^{d-1}\mathcal{I}_Z + \ldots + \mathcal{I}_Y \mathcal{I}_Z^{d-1}$$
$$\mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Z \supset \mathcal{I}_Z^d + \mathcal{I}_Z^{d-1}\mathcal{I}_Y + \ldots + \mathcal{I}_Z \mathcal{I}_Y^{d-1}$$

and

$$\mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Y + \mathcal{J}^d \cap \mathcal{I}_Z \supset \mathcal{I}_Y^d + \mathcal{I}_Y^{d-1}\mathcal{I}_Z + \ldots + \mathcal{I}_Y \mathcal{I}_Z^{d-1} + \mathcal{I}_Z^d = \mathcal{J}^d.$$

Podrozdział 2.8

2.8.1

(a) Let $C = B/\mathfrak{m}^2$ be a local ring with maximal ideal $\mathfrak{n} := \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Let also $K := k(B) = C/\mathfrak{n}$. Note that C is complete with respect to $\mathfrak{n}$ (trivially, since $\mathfrak{n}^2 = 0$) and thus by Theorem II.8.25(a) K may be embedded in C.

Firstly we will prove that $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \to \Omega_{C/k} \otimes_C K$ is an injective map of K-vector spaces or equivalently that

$$Hom_K(\Omega_{C/k} \otimes K, K) \to Hom_K(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2, K)$$

is surjective. This is done exactly like in Proposition II.8.7 –

$$Hom_K(\Omega_{C/k} \otimes K, K) = Hom_C(\Omega_{C/k}, K) = Der_k(C, K)$$

and the map $Der_k(C, K) \to Hom_K(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2, K)$ is given by $d \mapsto d|_{\mathfrak{n}} \pmod{\mathfrak{n}^2}$ (note that $d(\mathfrak{n}^2) = 0$). Let $h \in Hom_K(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2, K)$. Any element $x \in C$ may be uniquely written as $y + z \in K + \mathfrak{n}$. Then we define k-derivation $d : C \to K$ by setting $dx = h(z)$. The image of d in $Hom_K(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2, K)$ is h. Thus it is surjection, indeed.

Now let us consider the commutative diagram (it is commutative by the naturality of the second exact sequence):

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{B/k} \otimes_B K \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{K/k} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \arrow[r] & \Omega_{C/k} \otimes_C K \arrow[r] & \Omega_{K/k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Note that $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ is an isomorphism and $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \to \Omega_{C/k} \otimes_B K$ is injective – thus $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{B/k} \otimes_B K$ must be injective also.

(b) If $\Omega_{B/k}$ is free of rank $dim\, B + trdeg(K/k)$ then from the exact sequence:

$$0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{B/k} \otimes_B k(B) \to \Omega_{k(B)/k} \to 0$$

we have:

$$dim_{k(B)}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{k(B)} \Omega_{B/k} \otimes_B k(B) - \dim_{k(B)} \Omega_{k(B)/k} = dim\, B + trdeg(k(B)/k) - \dim_{k(B)} \Omega_{k(B)/k} = dim\, B$$

(by Theorem 8.6A) and thus B is regular.

Now let's suppose that B is regular. Let L denote the quotient field of B. Then $\Omega_{B/k} \otimes_B L = \Omega_{L/k}$ and thus (by Theorem 8.6A since k is perfect)

$$dim_L \Omega_{B/k} \otimes_B L = trdeg(L/k).$$

Moreover, from the above exact sequence and the regularity of B we get

$$\dim_{k(B)} \Omega_{B/k} \otimes_B k(B) = dim\, B + trdeg(k(B)/k).$$

From the assumption, B is a localisation of a finitely generated k-algebra, i.e. $B = A_{\mathfrak{p}}$ for some $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ (*note that if a local ring is a localisation of another ring, then it must be a localisation on a prime ideal*). Then:

$$trdim(L/k) = dim(A) = ht(\mathfrak{p}) + dim(A/\mathfrak{p}) = dim(B) + trdeg(k(B)/k)$$

(note that $L = Frac(A)$, $k(B) = Frac(A/\mathfrak{p})$) and thus by Lemma II.8.9 $\Omega_{B/k}$ is free of rank $dim(B) + trdeg(k(B)/k)$.

(c) Let $Spec(A)$ be an affine neighbourhood of x and let x correspond to $\mathfrak{p} \in Spec(A)$. It's straightforward that $(\Omega_{X/k})_x = \Omega_{B/k}$, where $B := \mathcal{O}_{X,x}$. Thus B is regular iff $\Omega_{B/k}$ is free of rank $dim(B) + trdeg(k(B)/k) = dim(A) = n$ (cf. (b)).

(d) ????

2.8.2 Denote $r := rank(\mathcal{E})$. Let for any closed point $x \in X$:

$$B_x := \{s \in V : s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\} = \ker \phi_x,$$

where $\phi_x : V \to \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ is the canonical homomorphism. Firstly, note that ϕ_x is surjective. Indeed, let $f \in \mathcal{E}_x$ – then $f = \sum_i f_i g_i$ for g_i – basis of V and $f_i \in \mathcal{O}_x$. Let a_i be the image of f_i in $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \cong k$ – then $\phi_x(\sum_i a_i g_i) = f$. Thus (since $\mathcal{E}_x \cong \mathcal{O}_x^r$):

$$\dim_k B_x = \dim_k V - \dim_k \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x = \dim_k V - \dim_k k^r = \dim V - r.$$

Consider the following set:

$$B := \{(x, s) \in X \times V : x \text{ – closed point}, s \in B_x\}.$$

The fiber of the projection $p_1 : B \to X$ is B_x and thus $\dim B = n + \dim V - r$. Thus the image of $p_2 : B \to V$ has dimension $\leqslant n + \dim V - r < \dim V$ and $V \backslash p_2(B) \neq \varnothing$. But $V \backslash p_2(B)$ is precisely the set of $s \in V$ such that $s_x \notin m_x\mathcal{E}_x$ for every closed point $x \in X$. Finally, note that if $y \in X$ is a non-closed point then for any closed point $x \in \overline{\{y\}}$ we have: $s_y \in m_y\mathcal{E}_y$ implies $s_x \notin m_x\mathcal{E}_x$.

Exact sequence: let $\mathcal{E}' := \mathcal{E}/s \cdot \mathcal{O}_X$ – we need to show that $\mathcal{E}'$ is locally free. Obviously $\mathcal{E}'$ is coherent, thus we need to show that the fibers are free. The following lemma ends the proof:

Lemma Let $(A, \mathfrak{m})$ be a local ring and $s \in A^r$ be such that $s \notin \mathfrak{m}A^r$. Then $M := A^r/s \cdot A$ is free of rank $r - 1$.

Proof We'll use Lemma II.8.9. Let $K = Frac(A)$, $k = A/\mathfrak{m}$. From the exact sequence

$$0 \to A \xrightarrow{\cdot s} A^r \to M \to 0$$

we obtain (by tensoring with K and k):

$$K \xrightarrow{\cdot s} K^r \to M \otimes_A K \to 0$$

$$k \xrightarrow{\cdot s} k^r \to M \otimes_A k \to 0.$$

But $s \neq 0$ implies that $K \xrightarrow{\cdot s} K^r$ is injective and $s \notin \mathfrak{m}A^r$ implies that $k \xrightarrow{\cdot s} k^r$ is injective. Thus

$$\dim_K M \otimes_A K = \dim_k M \otimes_A k = r,$$

which ends the proof.

2.8.3

(a) By Proposition II.8.11:

$$p_2^* \, \Omega_{Y/S} \to \Omega_{X \times_S Y/S} \to \Omega_{X \times_S Y/Y} \to 0$$

and by Proposition II.8.10: $\Omega_{X \times_S Y/Y} = p_1^*(\Omega_{X/S})$. Intercharging X and Y we obtain two exact sequences:

$$p_2^* \, \Omega_{Y/S} \to \Omega_{X \times_S Y/S} \to p_1^* \, \Omega_{X/S} \to 0$$

$$p_1^* \, \Omega_{X/S} \to \Omega_{X \times_S Y/S} \to p_2^* \, \Omega_{Y/S} \to 0$$

Consider the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & p_2^* \, \Omega_{Y/S} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{X \times_S Y/S} \arrow[r] \arrow[d] & p_1^* \, \Omega_{X/S} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & p_2^* \, \Omega_{Y/S} \arrow[l] & \Omega_{X \times_S Y/S} \arrow[l] & p_1^* \, \Omega_{X/S} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

By unraveling all the definitions we see that it is commutative. Thus we easily get that:

$$\Omega_{X \times_S Y/S} = p_1^* \, \Omega_{X/S} \oplus p_2^* \, \Omega_{Y/S}.$$

(b) Follows by taking determinant of the exact sequence from (a).

(c) By ex. I.7.2 $p_a(Y) = 1$ and:

$$p_a(Y \times Y) = 1 - 1 - 1 = -1.$$

But by (b): $p_g(Y \times Y) = 1 \cdot 1 = 1$.

2.8.4

(a)

($\Rightarrow$) Let Y be a complete intersection of codimension r. Then I (homogeneous ideal of Y in $k[x_0, \ldots, x_n]$) can be generated by r elements. Thus, by Problem I.2.17, it can be generated by r homogeneous elements and:

$$I = (f_1, \ldots, f_r) = \sum_i (f_i) \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} = \sum I_{H_i},$$

where $H_i := Z(f_i)$.

($\Leftarrow$) Let $J \trianglelefteq k[x_0, \ldots, x_n]$ be a (locally principial) homogeneous ideal of codimension 1. Then J must be principial. Indeed, J corresponds to some Cartier divisor on $\mathbb{P}^n$ (cf Remark II.6.17.1.) and every Cartier divisor on $\mathbb{P}^n$ is of the form $div(s)$ for some $s \in \mathcal{O}(d)$ (cf. Proposition II.7.7.).

Thus, we have: $J_{H_i} = (f_i)$ for some homogeneous $f_i \in k[x_0, \ldots, x_n]$. Therefore $I = (f_1, \ldots)$.

(b) Let Y be a normal complete intersection and let $C(Y)$ be its affine cone. Then $C(Y)$ is also a complete intersection (intersection of $codim(Y)$ hypersurfaces, that are cones of hypersurfaces intersecting in Y). Y is normal and thus it is regular in codimension 1. But then $C(Y)$ is also regular of codimension one, since $\pi^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{A}^1$ for some covering $(U_i)_i$ of Y (cf. Problem II.6.3(a)) and by Proposition II.6.6. But then by Proposition II.8.23 (b), $C(Y)$ must be normal. Thus Y is projectively normal.

(c) Y is projectively normal and thus by Exercise II.5.4, $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(l))$ is surjective for all $l \geqslant 0$. In particular, for $l = 0$: $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = k$. Thus Y is connected (if $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_s$ is the connected component decomposition, then $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = k^s$).

(d) we'll prove it by induction on r. For $r = 1$ it is obvious. Let us suppose that $Y_r = H_1 \cap \ldots \cap H_r$ is as required. Let $d := d_{r+1}$. We'll consider the d-uple embedding $\varphi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ ($N = \binom{n+d}{n} - 1$) – note that it's an isomorphism onto its image. By Bertini's theorem, the set of hyperplanes $H \not\supset \varphi(Y_r)$, such that $H \cap \varphi(Y_r)$ is connected and regular, is an open dense subset in linear system of hyperplanes. Analogously, the set of hyperplanes $H \not\supset \varphi(\mathbb{P}^n)$, such that $H \cap \varphi(\mathbb{P}^n)$ is connected and regular, is an open dense subset in linear system of hyperplanes. Hence there exists a hyperplane H such that $H \not\supset \varphi(Y_r), \varphi(\mathbb{P}^n)$ and both $H \cap \varphi(X)$ and $H \cap \varphi(\mathbb{P}^n)$ are connected and regular.

Let $H_{r+1} = \varphi^{-1}(H)$ – then it is a smooth hypersurface of degree d and moreover, $Y_r \cap H_{r+1} \cong \varphi(Y_r) \cap H$ is regular at every point – this ends the proof.

(e) This follows again by induction on r. For $r = 0$ this is just Exmaple II.8.20. If $\omega_{Y_r} = \mathcal{O}_{Y_r}(\sum d_i - n - 1)$ then by Proposition II.8.20 ("Adjunction formula") and the fact that $H_i \sim d_{r+1}\{x_0 = 0\}$:

$$\omega_{Y_{r+1}} \cong \mathcal{O}_{Y_r}(\sum d_i - n - 1) \otimes \mathcal{O}(d_{r+1})\mathcal{O}_{Y_{r+1}} = \mathcal{O}_{Y_{r+1}}(\sum d_i + d_{r+1} - n - 1).$$

(f) Let $Y = \{f = 0\}$. We have to compute $p_g(Y) = \dim_k \Gamma(Y, \mathcal{O}(d - n - 1))$. Note that the map:

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(N)) \to \Gamma(Y, \mathcal{O}(N))$$

is surjective and its kernel is $f \cdot \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(N - d))$. But $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}((d - n - 1) - d)) = 0$ and thus:

$$p_g(Y) = \dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d - n - 1)) = \binom{d-1}{n}$$

(there are $\binom{N+n}{N}$ monomials of degree N in $n + 1$ variables).

(g) Let $Y = \{f = 0\} \cap \{g = 0\}$ where f, g are of degrees d, e respectively. We have to compute $p_g(Y) = \dim_k \Gamma(Y, \mathcal{O}(d + e - 4))$. Note that the map:

$$\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(d + e - 4)) \to \Gamma(Y, \mathcal{O}(d + e - 4))$$

is surjective and we have to compute its kernel. We have the following exact sequences:

$$0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_Y \to 0$$

$$0 \to \mathcal{I}_Y(d + e - 4) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d + e - 4) \to \mathcal{O}_Y(d + e - 4) \to 0$$

and by taking the long exact sequence we easily see that the desired kernel is $H^0(\mathcal{I}_Y(d + e - 4))$. But $\mathcal{I}_Y$ fits into the exact sequence:

$$0 \to \mathcal{O}(-d - e) \to \mathcal{O}(-d) \oplus \mathcal{O}(-e) \to \mathcal{I}_Y \to 0$$

(the second map is $(A, B) \mapsto A \cdot f + B \cdot g$, the first map is $A \mapsto (A \cdot g, -A \cdot f)$). Thus

$$0 \to \mathcal{O}(-4) \to \mathcal{O}(e - 4) \oplus \mathcal{O}(d - 4) \to \mathcal{I}_Y(d + e - 4) \to 0.$$

Finally, by taking the long exact sequence of cohomology and noting that $H^0(\mathcal{O}(-4)) = 0$, etc, we see that this kernel is

$$f \cdot \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(e - 4)) \oplus g \cdot \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(d - 4)).$$

Thus:

$$p_g(Y) = \binom{d + e - 1}{3} - \binom{d-1}{3} - \binom{e-1}{3} = \frac{1}{2}de(d + e - 4) + 1.$$

2.8.6

Note that structure of A-module on I is given by $(a, i) \mapsto \tilde{a} \cdot i$ for any $\tilde{a} \in B'$ lifting a.

(a) Let $g, g' : A \to B'$ lift f. Then $g(x) - g'(x) \in I$ for any $x \in B'$ and (since $I^2 = 0$) $(g(x) - g'(x)) \cdot (g(y) - g'(y)) = 0$. Thus $im(g - g') \subset I$ and:

$$\begin{aligned} \theta(ab) - a \cdot \theta(b) - b \cdot \theta(a) &= g(ab) - g'(ab) - g(a) \cdot (g(b) - g'(b)) - g(b) \cdot (g(a) - g'(a)) = \\ &= g(ab) - g'(ab) - g(ab) + g(a)g'(b) - g(ab) + g(b)g'(a) = \\ &= g(a)g'(b) + g(b)g'(a) - g'(ab) - g(ab) = \\ &= (g(a) - g'(a)) \cdot (g(b) - g(b)) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

implying that θ is a k-derivation.

Let us suppose that $\theta : A \to I$ is a derivation and $g : A \to B'$ lifts f. Then $g' := g + \theta$ obviously lifts f. The homomorphism property for g' follows from the derivation formula:

$$\begin{aligned} g'(ab) &= g(ab) + \theta(ab) = g(a)g(b) + g(a)\theta(b) + g(b)\theta(a) = \\ &= g(a)g(b) + g(a)\theta(b) + g(b)\theta(a) + \theta(a)\theta(b) = \\ &= (g(a) + \theta(a)) \cdot (g(b) + \theta(b)) = \\ &= g'(a)g'(b). \end{aligned}$$

(b) Let $A = k[x_1, \ldots, x_n]/J = k[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n]$. Let $s_1, \ldots, s_n \in B'$ satisfy $s_i \equiv f(x_i) \pmod{\mathcal{I}}$. Then the homomorphism $h : P \to B'$ given by $h(x_i) := s_i$ is well-defined and lifts f.

h lifts f and thus $h(J) \subset I$. Therefore h induces a map $\overline{h} : J/J^2 \to I/I^2 = I$. This map is A-linear:

$$\overline{h}(x_i \cdot j) = \overline{h}(x_i) \cdot \overline{h}(j) = s_i \cdot \overline{h}(j) = x_i \cdot \overline{h}(j)$$

(c) Surjection $P \to A$ induces a closed immersion $Spec(A) \hookrightarrow Spec(P)$ and thus by Theorem II.8.17

$$0 \to J/J^2 \to \Omega_{P/k} \otimes A \to \Omega_{A/k} \to 0$$

and $\Omega_{A/k}$ is a locally free A-module (ie. $M_{\mathfrak{p}}$ is free over $A_{\mathfrak{p}}$ for any $\mathfrak{p} \in Spec(A)$). But **a module is locally free iff it is projective.** Thus $Ext^1(\Omega_{A/k}, J/J^2) = 0$ and by applying the functor $Hom_A(-, I)$ we obtain an exact sequence

$$0 \to Hom_A(\Omega_{A/k}, I) \to Hom_A(\Omega_{P/k} \otimes A, I) = Hom_P(\Omega_{P/k}, I) \to Hom_A(J/J^2, I) \to 0$$

Let $\theta \in Hom_P(\Omega_{P/k}, I)$ be any element whose image in $Hom_A(J/J^2, I)$ is $\overline{h}$. Let $h' := h - \theta$. Then:

- h' is a homomorphism lifting $f \circ \pi : P \to B'$ (where $\pi : P \to A$ is the canonical homomorphism) – by (a) applied to P instead of A,
- $h'(J) = 0$ – since we chosen θ such that $\theta|_J = \overline{h}$.

Thus h' induces a homomorphism $g : A \to B$ lifting f. This ends the proof.

2.8.7 Let $X = Spec(A)$ be affine, $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf on X and Y be an infinitesimal extension of X by $\mathcal{F}$. Then $Y_{red} = X$ and thus by Exercise III.3.1 Y is affine: $Y = Spec(B)$. Let $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ be such a coherent sheaf of ideals on Y that $(Y, \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}) \cong (X, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{I}^2 = 0$ and $\mathcal{I} \cong \mathcal{F}$. Then we have the following exact sequence of (non-unital) commutative rings:

$$0 \to I \to B \to A \to 0.$$

By exercise II.8.6 (with $A = B' := A$, $B' := B$) there exists a k-algebra homomorphism that is a section of $B \to A$. Thus $B \cong A \oplus I$ and Y is the trivial extension.

Zadanie dodatkowe:

2.8.A Udowodnij Proposition 8.IA.

Łatwo sprawdzić, że $d : B \to I/I^2$ jest A-derywacją. Niech $D : B \to M$ będzie dowolną inną A-derywacją. Aby pokazać, że D faktoryzuje się przez d, wystarczy wykazać, że jeżeli $d(b) = 0$, to $D(b) = 0$. Załóżmy, że $d(b) = 0$, tzn.

$$b \otimes 1 - 1 \otimes b = \sum_i \alpha_i \beta_i$$

gdzie $\alpha_i, \beta_i \in I$. Rozważmy A-dwuliniowe odwzorowanie $\Psi(x, y) = D(x) \cdot y : B \to M$ – indukuje ono odwzorowanie $\psi(x \otimes y) = D(x) \cdot y : B \otimes_A B \to M$. Mamy $D(1) = 0$, więc

$$D(b) \cdot 1 - 0 \cdot b = \psi(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = \sum_i \psi(\alpha_i \beta_i)$$

–wystarczy więc udowodnić, że jeżeli $\alpha = \sum_i a_i \otimes b_i \in I$, $\beta = \sum_j c_j \otimes d_j \in I$ (tzn. $\sum_i a_i b_i = 0$, $\sum_j c_j d_j = 0$), to $\psi(\alpha\beta) = 0$. Mamy:

$$\psi(\alpha\beta) = \psi\Big(\sum_{i,j} (a_i \cdot c_j) \otimes (b_i \cdot d_j)\Big) = \sum_{i,j} D(a_i c_j) \cdot (b_i \cdot d_j) =$$

$$= \sum_{i,j} (D(a_i) \cdot c_j + a_i \cdot D(c_j)) \cdot (b_i \cdot d_j) =$$

$$= \sum_i D(a_i) b_i \cdot \left(\sum_j c_j d_j\right) + \sum_j D(c_j) d_j \cdot \left(\sum_i a_i b_i\right) = 0 + 0 = 0$$

3. Cohomology

Podrozdział 3.2

3.2.1

(a) niech $Y = \{P, Q\}$ – wtedy ciąg dokładny: $0 \to \mathbb{Z}_U \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_Y \to 0$ indukuje długi ciąg dokładny kohomologii:

$$0 \to \Gamma(\mathbb{Z}_U, X) \to \Gamma(\mathbb{Z}, X) \to \Gamma(\mathbb{Z}_Y, X) \to H^1(\mathbb{Z}_U, X) \to H^1(\mathbb{Z}, X) \to H^1(\mathbb{Z}_Y, X) \to \dots$$

przy czym: $\Gamma(\mathbb{Z}, X) = \mathbb{Z}$, $\Gamma(\mathbb{Z}_Y, X) = \Gamma(j_*(\mathbb{Z}|_Y), X) = \Gamma(\mathbb{Z}, Y) = \Gamma(\mathbb{Z}, \{P\}) \oplus \Gamma(\mathbb{Z}, \{Q\}) = \mathbb{Z}^2$ oraz $H^1(\mathbb{Z}, X) = 0$. Załóżmy nie wprost, że $H^1(\mathbb{Z}_U, X) = 0$, wtedy dostajemy krótki ciąg dokładny:

$$0 \to \Gamma(\mathbb{Z}_U, X) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2 \to 0$$

– sprzeczność, bo $\mathbb{Z}^2$ nie jest obrazem $\mathbb{Z}$.

(b) ??

3.2.2 Snop $\mathcal{K}$ jest wiotki, jako że jest stałym snopem na nierozkładalnej przestrzeni topologicznej. Snop $\mathcal{K}/\mathcal{O} \cong \sum_{P \in X} i_P(I_P)$ jest również wiotki jako suma prosta sky-scraperów (które są wiotkie). Stąd $I^\bullet = (\mathcal{K} \to \mathcal{K}/\mathcal{O} \to 0 \to 0 \to \dots)$ jest wiotką rezolwentą $\mathcal{O}$.
Z zadania II.1.21 (e) ciąg

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O}) \to \Gamma(X, \mathcal{K}) \to \Gamma(X, \mathcal{K}/\mathcal{O}) \to 0$$

jest dokładny. Stąd również $H^i(X, \mathcal{O}) := h^i(\Gamma(X, I^\bullet)) = 0$ dla $i \geqslant 1$.

3.2.3

(a) niech $0 \to \mathcal{F}' \overset{\varphi_1}{\to} \mathcal{F} \overset{\varphi_2}{\to} \mathcal{F}'' \to 0$ będzie ciągiem dokładnym snopów. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\mathcal{F}'$ jest podsnopem $\mathcal{F}$ – wtedy z definicji $\Gamma_Y(X, \mathcal{F}')$ jest podgrupą $\Gamma_Y(X, \mathcal{F})$.
Ponadto $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$, więc $im(\varphi_1 : \Gamma_Y(X, \mathcal{F}') \to \Gamma_Y(X, \mathcal{F})) \subset \ker(\varphi_2 : \Gamma_Y(X, \mathcal{F}) \to \Gamma_Y(X, \mathcal{F}''))$. Pozostaje sprawdzić odwrotną inkluzję. Załóżmy, że $t \in \Gamma_Y(X, \mathcal{F})$, $\varphi_2(t) = 0$. Wtedy (z dokładności ciągu snopów) $t \in \Gamma(X, \ker \varphi_2) = \Gamma(X, \mathcal{F}')$, czyli $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}') \cap \Gamma_Y(X, \mathcal{F}) = \Gamma_Y(X, \mathcal{F}') = im(\varphi_1 : \Gamma_Y(X, \mathcal{F}') \to \Gamma_Y(X, \mathcal{F}))$.

(b) niech $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ będzie surjekcją i załóżmy, że $\ker \varphi \cong \mathcal{F}'$ jest wiotkim snopem. Chcemy pokazać, że $\varphi : \Gamma_Y(X, \mathcal{F}) \to \Gamma_Y(X, \mathcal{F}'')$ jest surjekcją. Oznaczmy $U := X \backslash Y$.
Niech $s \in \Gamma_Y(X, \mathcal{F}'')$ – wtedy z zadania II.1.16 istnieje $t \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ takie, że $\varphi(t) = s$. Z założenia mamy: $s|_U = 0$, czyli $t|_U \in \ker(\varphi : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)) = \mathcal{F}'(U)$. Z wiotkości $\mathcal{F}'$ istnieje $w_1 \in \mathcal{F}'(X)$ takie, że $w_1|_U = t|_U$. Niech $t_1 := t - w_1$ – wtedy:

- $t_1 \in \Gamma_Y(X, \mathcal{F})$, bo $(t_1)|_U = t|_U - (w_1)|_U = 0$,
- $\varphi(t_1) = \varphi(t + w_1) = \varphi(t) = s$ (ponieważ $w_1 \in \mathcal{F}' = \ker \varphi$)

co kończy dowód.

(c) dowód przebiega identycznie, jak w Proposition III.2.5:
jeżeli $\mathcal{I}$ jest takim snopem iniektywnym, że $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$, zaś $\mathcal{G} := \mathcal{I}/\mathcal{F}$, to ciąg

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0$$

jest dokładny oraz $\mathcal{G}$ jest snopem wiotkim z zad. II.1.16(b). Długi ciąg dokładny kohomologii z nośnikiem Y dla powyższego ciągu oraz równość $H^i_Y(X, \mathcal{I}) = 0$ dla $i \geqslant 1$ daje nam: $H^1_Y(X, \mathcal{F}) = 0$ oraz $H^{i+1}_Y(X, \mathcal{F}) = H^i_Y(X, \mathcal{G})$, co pozwala na udowodnienie tezy indukcyjnie wg i.

(d) Oznaczmy: $U := X \backslash Y$. Mamy:

- $\Gamma_Y(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})$ z definicji,
- $\ker(\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})) = \{s \in \mathcal{F}(X) : s|_U = 0\} = \{s \in \mathcal{F}(X) : supp(s) \subset Y\} = \Gamma_Y(X, \mathcal{F})$,
- $\Gamma(X, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ z wiotkości snopa $\mathcal{F}$.

(e) niech $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}^\bullet$ będzie rezolwentą wiotką $\mathcal{F}$. Wtedy z poprzedniego zadania krótki ciąg kompleksów $0 \to \Gamma_Y(X, \mathcal{G}^\bullet) \to \Gamma(X, \mathcal{G}^\bullet) \to \Gamma(U, \mathcal{G}^\bullet) \to 0$ jest dokładny. Każdy krótki ciąg dokładny kompleksów indukuje jednak długi ciąg dokładny ich kohomologii – w tym przypadku dostajemy ciąg dokładny z zadania.

(f) niech $U := X \backslash Y$ – wtedy $X = U \cup V$. Zauważmy, że dla dowolnego snopa $\mathcal{G}$: $\Gamma_Y(X, \mathcal{G}) \cong \Gamma_Y(V, \mathcal{G}|_V)$ – istotnie, odwzorowanie restrykcji $\Gamma_Y(X, \mathcal{G}) \to \Gamma_Y(V, \mathcal{G}|_V)$ jest:

- iniekcją – jeżeli $s \in \Gamma_Y(X, \mathcal{G})$, to $s|_U = 0$, więc jeżeli $s|_V = 0$, to $s = 0$ z własności jednoznaczności snopa,
- surjekcją – jeżeli $t \in \Gamma_Y(V, \mathcal{G}|_V)$, to możemy znaleźć $s \in \Gamma_Y(X, \mathcal{G})$ takie, że $s|_U = 0$, $s|_V = t$ (jako że $t|_{U \cap V} = 0$).

Niech $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ będzie wiotką rezolwentą – wtedy $0 \to \mathcal{F}|_V \to \mathcal{I}^\bullet|_V$ również jest wiotką rezolwentą, więc podstawiając $\mathcal{G} := \mathcal{I}^k$:

$$H^i_Y(X, \mathcal{F}) = h^i(\Gamma_Y(X, \mathcal{I}^\bullet)) = h^i(\Gamma_Y(V, \mathcal{I}^\bullet|_V)) = H^i_Y(V, \mathcal{F}|_V)$$

3.2.4 Zauważmy, że dla dowolnego snopa $\mathcal{G}$ mamy następujący ciąg dokładny:

$$0 \to \Gamma_{Y_1 \cap Y_2}(X, \mathcal{G}) \to \Gamma_{Y_1}(X, \mathcal{G}) \oplus \Gamma_{Y_2}(X, \mathcal{G}) \to \Gamma_{Y_1 \cup Y_2}(X, \mathcal{G}) \to 0$$

gdzie pierwsze odwzorowanie to: $f \mapsto (f, -f)$, zaś drugie: $(a, b) \mapsto a + b$. Istotnie:

- pierwsza strzałka jest iniekcją z definicji,
- dla $(a, b) \in \Gamma_{Y_1}(X, \mathcal{G}) \oplus \Gamma_{Y_2}(X, \mathcal{G})$ mamy $a + b = 0$ wtw. gdy $a = -b \in \Gamma_{Y_1 \cap Y_2}(X, \mathcal{G})$,
- element $f \in \Gamma_{Y_1 \cup Y_2}(X, \mathcal{G})$ jest obrazem $(f, 0) \in \Gamma_{Y_1}(X, \mathcal{G}) \oplus \Gamma_{Y_2}(X, \mathcal{G})$

Stąd, jeżeli $0 \to \mathcal{F} \to I^\bullet$ jest rezolwentą iniektywną pewnego snopa $\mathcal{F}$, to krótki ciąg dokładny kompeksów $0 \to \Gamma_{Y_1 \cap Y_2}(X, I^\bullet) \to \Gamma_{Y_1}(X, I^\bullet) \oplus \Gamma_{Y_2}(X, I^\bullet) \to \Gamma_{Y_1 \cup Y_2}(X, I^\bullet) \to 0$ indukuje długi ciąg kohomologii z zadania.

3.2.5

Uwaga: w zadaniu powinno być $\mathcal{F}_P := j^{-1}\mathcal{F}$ zamiast $\mathcal{F}_P := j^*\mathcal{F}$. Ponadto dla odróżnienia od źdźbła będę stosował oznaczenie $\mathcal{F}_{(P)} := j^*\mathcal{F}$

Zauważmy najpierw, że:

(1) dla dowolnego otwartego $U \subset X$ mamy: $P \in U$ wtw. gdy $X_P \subset U$, ponieważ zbiory otwarte w przestrzeni Zariskiego są zamknięte ze względu na generalizację (zadanie II.3.18(b))

(2) jeżeli zbiór D jest domknięty oraz $D \cap X_P = \{P\}$, to $D \backslash \{P\}$ jest również domknięty.

D: zbiór $D \backslash \{P\}$ jest konstruowalny, więc wystarczy sprawdzić, że jest zamknięty ze względu na specjalizacje (zadanie II.3.18(b)). Załóżmy, że $P_1 \rightsquigarrow P_2$ oraz $P_2 \in D \backslash \{P\}$. Z domkniętości D stwierdzamy, że $P_1 \in D$. Ale $P_1 \neq P$ – w przeciwnym wypadku $P_2 \in D \cap X_P \backslash \{P\}$. Stąd $P_1 \in D \backslash \{P\}$, więc $D \backslash \{P\}$ jest domknięty.

- **Krok I:** $\Gamma(X_P, \mathcal{F}_{(P)}) \cong \bigcap_{Q \in X_P} \ker j_{P,Q}$, gdzie dla $Q \in X_P$ przez $j_{P,Q} : \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_Q$ oznaczamy naturalne odwzorowanie (drugi system prosty jest „zagęszczeniem” pierwszego).

  D: Niech $\mathcal{P}$ będzie presnopem $U \mapsto \lim_{U \subset V} \mathcal{F}(U)$ na X_P; wtedy z definicji $\mathcal{F}_{(P)}$ jest usnopowieniem $\mathcal{P}$. Z definicji:

  $$H^0_P(X_P, \mathcal{F}_{(P)}) = \Gamma_P(X_P, \mathcal{F}_{(P)}) = \{s \in \mathcal{F}_{(P)}(X_P) : \forall_{Q \in X_P, Q \neq P} \quad s_Q = 0\}$$

  Zauważmy, że:

  $$\Gamma(X_P, \mathcal{F}_{(P)}) = \Gamma(X_P, \mathcal{P}^\#) = \left\{ (s_Q) \in \prod_{Q \in X_P} \mathcal{P}_Q : \exists_{(U_i) \text{ – pokrycie otwarte } X_P} \exists_{f_i \in \mathcal{P}(U_i)} \qquad (f_i)_Q = s_Q \quad \forall_{Q \in U_i} \right\}$$

  Ponadto źdźbła $\mathcal{P}_Q = \mathcal{F}_Q$ są równe dla dowolnego $Q \in X_P$, zaś dowolny element $f_i \in P(U_i) = \lim_{U_i \subset V} \mathcal{F}(V)$ odpowiada jednoznacznie pewnemu elementowi $\mathcal{F}(V_i)$ dla pewnych zbiorów otwartych V_i, $\bigcup_i V_i \supset X_P$. Stąd:

  $$\Gamma(X_P, \mathcal{F}_{(P)}) = \Gamma(X_P, \mathcal{P}^\#) = \left\{ (s_Q) \in \prod_{Q \in X_P} \mathcal{F}_Q : \exists_{(V_i) \text{ – tże } \bigcup_i V_i \supset X_P} \quad \exists_{f_i \in \mathcal{F}(V_i)} \quad (f_i)_Q = s_Q \quad \forall_{Q \in V_i \cap X_P} \right\}$$

więc (ponieważ obraz $(s_Q)_Q$ w źdźble $\mathcal{P}_R^{\#}$ dany jest przez naturalne rzutowanie $(s_Q)_Q \mapsto s_R$)

$$\Gamma_P(X_P, \mathcal{F}_{(P)}) = \{s \in \Gamma(X_P, \mathcal{F}_{(P)}) : s_Q = 0 \qquad \forall_{Q \in X_P, Q \neq P}\} =$$

$$= \{s_P \in \mathcal{F}_P : \exists_{(V_i)\text{ -- tże } \bigcup_i V_i \supset X_P} \quad \exists_{f_i \in \mathcal{F}(V_i)} \quad (f_i)_Q = 0 \text{ dla } Q \in V_i \cap X_P, Q \neq P \text{ oraz } (f_i)_P = s_P\}$$

$$= \{s_P \in \mathcal{F}_P : \exists_{V \ni P} \quad \exists_{f \in \mathcal{F}(V)} \quad f_Q = 0 \text{ dla } Q \in X_P, Q \neq P \text{ oraz } f_P = s_P\}$$

(w ostatniej linijce skorzystaliśmy z tego, że jeżeli $P \in V_i$, to $X_P \subset V_i$)

$$= \bigcap_{Q \in X_P} \ker j_{P,Q}$$

- **Krok II:** $H_P^0(X, \mathcal{F}) = H_P^0(X_P, \mathcal{F}_{(P)})$.

  D: Z definicji:

  $$H_P^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma_P(X, \mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(X) : \forall_{Q \in X, Q \neq P} \quad s_Q = 0\}$$

  Naturalne przeształcenie $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_P$ indukuje przekształcenie $\Gamma_P(X, \mathcal{F}) \to \bigcap_{Q \in X_P} \ker j_{P,Q}$; pokażemy, że jest ono izomorfizmem:

  - iniektywność: jeżeli $f \in \Gamma_P(X, \mathcal{F})$ oraz $f_P = 0$ w $\mathcal{F}_P$, to $supp(f) = \varnothing$, więc $f = 0$,
  - surjektywność: niech $[(V, f)] \in \bigcap_{Q \in X_P} \ker j_{P,Q}$. Niech $D := supp(f)$ – wtedy D jest domknięte w V oraz $X_P \cap D = \{P\}$. Stąd wynika, że $D \backslash \{P\}$ jest również domknięte w V – uwaga (2) przed rozwiązaniem. Niech $V_1 := V \backslash (D \backslash \{P\})$ będzie zbiorem otwartym. Z własności przedłużania snopa istnieje $\widetilde{f} \in \mathcal{F}(X)$ takie, że $\widetilde{f}|_{V_1} = f|_{V_1}$ oraz $\widetilde{f}|_{X \backslash \{P\}} = 0$.

- **Krok III:** $\mathcal{F} \mapsto H_P^i(X, \mathcal{F})$ oraz $\mathcal{F} \mapsto H_P^i(X_P, \mathcal{F}_P)$ są *effaceable*

  D: pierwszy z tych funktorów jest *effaceable* jako funktor sprzężony.

  Nie udało mi się pokazać, że drugi funktor jest effaceable.

3.2.6 Snop $\mathcal{I}$ jest iniektywny, jeżeli dla każdych snopów $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G}$ oraz odwzorowania $f : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ istnieje jego przedłużenie $F : \mathcal{G} \to \mathcal{I}$ (równoważna definicja iniektywności).

- **Krok I – „snopowe kryterium Baera":** snop $\mathcal{I}$ jest iniektywny wtw. gdy dla każdego zbioru otwartego U oraz snopa $\mathcal{R} \leqslant \mathbb{Z}_U$ oraz dla każdego odwzorowania $f : \mathcal{R} \to \mathcal{I}$ istnieje rozszerzenie f do odwzorowania $f : \mathbb{Z}_U \to \mathcal{I}$.

($\Rightarrow$) Wystarczy podstawić w definicji iniektywności $\mathcal{F} := \mathcal{R}$, $\mathcal{G} := \mathbb{Z}_U$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\mathcal{I}$ spełnia to założenie i niech $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G}$, $f : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$. Rozważmy rodzinę:

$$\mathcal{A} := \left\{(\mathcal{F}', \widetilde{f} : \mathcal{F}' \to \mathcal{I}) : \mathcal{F} \leqslant \mathcal{F}' \leqslant \mathcal{G}, \quad \widetilde{f}|_{\mathcal{F}} = f\right\}$$

uporządkowaną przez relację $(\mathcal{F}_1, \widetilde{f}_1) \prec (\mathcal{F}_2, \widetilde{f}_2)$ wtw. gdy $\widetilde{F}_1 \leqslant \widetilde{F}_2$ oraz $\widetilde{f}_2|_{\mathcal{F}_1} = \widetilde{f}_1$.
Rodzina $\mathcal{A}$ jest łańcuchowo ograniczona (suma mnogościowa łańcucha snopów jest snopem, itd.), więc z lematu Zorna możemy wybrać element maksymalny $(\mathcal{M}, F : \mathcal{M} \to \mathcal{I})$. Załóżmy nie wprost, że $\mathcal{M} \neq \mathcal{G}$, czyli np. $\mathcal{M}(U) \subsetneq \mathcal{G}(U)$, gdzie U jest ustalonym zbiorem otwartym. Niech $h \in \mathcal{G}(U) \backslash \mathcal{M}(U)$ oraz niech $\mathcal{M}'$ będzie snopem generowanym przez $\mathcal{M}$ oraz h, tzn. $\mathcal{M}' = \mathcal{M} + \mathbb{Z}_U \cdot h$, czyli:

$$\mathcal{M}'(V) := \begin{cases} \mathcal{M}(V), & \text{dla } V \not\subset U \\ \mathcal{M}(V) + \mathbb{Z}_U(V) \cdot h|_V, & \text{dla } V \subset U \end{cases}$$

Rozważmy snop $\mathcal{R} \leqslant \mathbb{Z}_U$, dany przez:

$$\mathcal{R}(V) := \{n \in \mathbb{Z}_U(V) : n \cdot h \in \mathcal{M}(V)\}$$

oraz odwzorowanie $g : \mathcal{R} \to \mathcal{I}$ dane przez: $g(n) := F(n \cdot h|_V)$ dla $n \in \mathbb{Z}_U(V)$, $V \subset U$ (zauważmy, że wtedy $n \cdot h \in \mathcal{M}(V)$, więc $F(n \cdot h|_V)$ jest dobrze określone). Wtedy z założenia możemy to odwzorowanie przedłużyć do $G : \mathbb{Z}_U \to \mathcal{I}$.
Zdefiniujmy $F' : \mathcal{M}' \to \mathcal{I}$ wzorem: $F'(m + n \cdot h|_V) := F(m) + G(n)$ dla $m \in M(V)$, $n \in \mathbb{Z}_U(V)$. Jest to dobrze określone (nie zależy od wyboru m, n), bo jeżeli $m + n \cdot h|_V = 0$, to $n \in \mathcal{R}(V)$, więc

$$F'(m + n \cdot h|_V) = F(m) + G(n) = F(m) + g(n) = F(m) + F(n \cdot h|_V) = F(m + n \cdot h|_V) = F(0)$$

Stąd $(\mathcal{M}, F) \prec (\mathcal{M}', F')$ – sprzeczność z maksymalnością $(\mathcal{M}, F)$ oznacza, że $\mathcal{M} = \mathcal{G}$ i kończy dowód.

- **Krok II – jeżeli X – noetherowska, $U \subset X$ – otwarty, $\mathcal{R} \leqslant \mathbb{Z}_U$ to $\mathcal{R}$ jest generowany przez skończoną liczbę cięć:**

  Załóżmy najpierw, że X jest nierozkładalne; przeprowadzimy indukcję po $\dim X$. Niech $d \in \mathbb{Z}_+$ będzie najmniejsze takie, że $\mathcal{R}_x = d\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{U,x}$ dla pewnego $x \in U$ i niech $[(V, f \in \mathcal{R}(V))] \in \mathcal{R}_x$ będzie generatorem $\mathcal{R}_x$. Wtedy $\mathcal{R}|_V \cong d \cdot \mathbb{Z}_U|_V$ (jako podsnop $\mathbb{Z}_U$) – istotnie, dla $W \subset V$: $\mathcal{R}(W)$ jest podgrupą $\mathbb{Z}$, zawierającą $\langle f|_W \rangle = d \cdot \mathbb{Z}$, a z drugiej strony $\mathcal{R}(W) \ncong d' \cdot \mathbb{Z}$ dla $d'|d$ z minimalności d. Stąd $\mathcal{R}_V \cong \mathbb{Z}_V$. Niech $Y = X \backslash V$ – wtedy $\dim Y < \dim X$, więc z założenia indukcyjnego $\mathcal{R}|_Y \leqslant \mathbb{Z}|_Y$ jest generowane przez skończoną liczbę cięć. Stąd również $\mathcal{R}_Y := j_*(\mathcal{R}|_Y)$ jest generowane przez skończoną liczbę cięć. Z ciągu dokładnego $0 \to \mathbb{Z}_U = \mathcal{R}_U \to \mathcal{R} \to \mathcal{R}_Y \to 0$ wnosimy, że $\mathcal{R}$ również jest generowane przez skończoną liczbę cięć.

  Niech teraz X będzie dowolne – przeprowadzimy indukcję wg liczby składowych nierozkładalnych. Niech Y będzie jedną ze składowych nierozkładalnych, zaś $U := X \backslash Y$. Wtedy z założenia indukcyjnego dla przestrzeni $\overline{U}$ stwierdzamy, że snop $\mathcal{R}_U$ jest generowany przez skończoną liczbę cięć. Podobnie Y wraz ze snopem $\mathcal{R}_Y$ jest generowany przez skończoną liczbę cięć z pierwszej części dowodu. Stąd i z ciągu dokładnego $0 \to \mathcal{R}_U \to \mathcal{R} \to \mathcal{R}_Y \to 0$ dostajemy tezę.

- **Krok III – snop $\lim_\alpha \mathcal{I}_\alpha$ jest iniektywny**

  Z kroku 1 wystarczy pokazać, że jeżeli $\mathcal{R} \leqslant \mathbb{Z}_U$, $f : \mathcal{R} \to \lim_\alpha \mathcal{I}_\alpha$, to możemy przedłużyć f do $F : \mathbb{Z}_U \to \lim_\alpha \mathcal{I}_\alpha$. Z kroku II snop $\mathcal{R}$ jest generowany przez skończenie wiele cięć, więc istnieje β takie, że $imf \subset \mathcal{I}_\beta$. Stąd z iniektywności $\mathcal{I}_\beta$ możemy przedłużyć $f : \mathcal{R} \to \mathcal{I}_\alpha$ do $F : \mathbb{Z}_U \to \mathcal{I}_\beta$. Złożenie z naturalnym odwzorowaniem $I_\beta \to \lim_\alpha \mathcal{I}_\alpha$ daje tezę.

Podrozdział 3.3

3.3.1 If $X = Spec(A)$ is affine then obviously $X_{red} = Spec(A/\sqrt{(0)})$ is also.

Let us suppose now that X_{red} is affine. We'll use Serre's criterion (Theorem III.3.7) to show that X is affine. Let us denote the sheaf of nilpotent elements in X by $\mathcal{N}$ – then X_{red} is the closed subscheme of X corresponding to ideal sheaf $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{O}_{X_{red}} = \mathcal{O}_X/\mathcal{N}$) and moreover (since X is noetherian) $\mathcal{N}^k = 0$ for some k. Let also $i : X_{red} \hookrightarrow X$ be the closed immersion. Let $\mathcal{F}$ be an arbitrary coherent sheaf on X. Consider the filtration:

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{N} \cdot \mathcal{F} \supset \mathcal{N}^2 \cdot \mathcal{F} \supset \ldots \supset \mathcal{N}^k \cdot \mathcal{F} = 0.$$

We'll show inductively that $H^i(X, \mathcal{N}^j \cdot \mathcal{F}) = 0$ (induction on $j = k, \ldots, 0$). For $j = k$ the proof is obvious. Let's suppose it holds for $j+1$, then the exact sequence:

$$0 \to \mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F} \to \mathcal{N}^j\mathcal{F} \to \mathcal{N}^j\mathcal{F}/\mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F} \to 0$$

yields us a long exact sequence:

$$\ldots \to H^i(X, \mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{N}^j\mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{N}^j\mathcal{F}/\mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F}) \to \ldots \qquad (*)$$

But $H^i(X, \mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F}) = 0$ by induction hypothesis. Moreover, $\mathcal{N}^j\mathcal{F}/\mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F}$ has a natural structure of $\mathcal{O}_X/\mathcal{N} = \mathcal{O}_{X_{red}}$-module and thus $\mathcal{N}^j\mathcal{F}/\mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F} = i_*\mathcal{G}$ for some coherent $\mathcal{O}_{X_{red}}$-module $\mathcal{G}$ on X_{red}. Thus by Lemma II.2.10:

$$H^i(X, \mathcal{N}^j\mathcal{F}/\mathcal{N}^{j+1}\mathcal{F}) = H^j(X_{red}, \mathcal{G}) = 0,$$

since cohomology of coherent sheaf on affine scheme is zero. Thus by the long exact sequence $(*)$ we have $H^i(X, \mathcal{N}^j\mathcal{F}) = 0$ – this ends induction step.

3.3.5

$(i) \Rightarrow (ii)$: WLOG $U = Spec(A)$ is an affine neighbourhood.

(**Explanation:** if U is an arbitrary neighbourhood of P, then it contains some affine neighbourhood V. Thus, if $f \in \mathcal{O}(U \backslash P)$, then $f|_{V \backslash P} \in \mathcal{O}(V \backslash P)$ and $f|_{V \backslash P} = t|_{V \backslash P}$ for some $t \in \mathcal{O}(V)$. But by sheaf property of $\mathcal{O}$, there exists $t_1 \in \mathcal{O}(U)$ such that $t_1|_{U \backslash P} = f|_{U \backslash P}$ and $t_1|_V = t|_V$. Thus $f|_{U \backslash P} = t_1$.)

Let $Z = \{P\}$, $V := U \backslash \{P\}$. Then by Ex. III.2.3 (e) we have an exact sequence:

$$0 \to H_Z^0(U, \mathcal{O}) \to H^0(U, \mathcal{O}) \to H^0(V, \mathcal{O}|_V) \to H_Z^1(U, \mathcal{O}) \to H^1(U, \mathcal{O}) \to \dots$$

But $H_Z^i(U, \mathcal{O}) = H_\mathfrak{m}^i(A)$ (where $\mathfrak{m}$ is the maximal ideal corresponding to P) and thus by Ex. 3.4 (b):

$$H_Z^0(U, \mathcal{O}) = H_Z^1(U, \mathcal{O}) = 0.$$

Thus:

$$\mathcal{O}(U) = H^0(U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} H^0(V, \mathcal{O}|_V) = \mathcal{O}(V)$$

– this ends the proof.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Let $U = Spec(A)$ be an affine neighbourhood, $Z = \{P\}$, $V := U \backslash \{P\}$. Then (again by Ex. III.2.3 (e)):

$$0 \to H_Z^0(U, \mathcal{O}) \to H^0(U, \mathcal{O}) \to H^0(V, \mathcal{O}|_V) \to H_Z^1(U, \mathcal{O}) \to H^1(U, \mathcal{O}) \to \dots$$

By assumption $H^0(U, \mathcal{O}) \to H^0(V, \mathcal{O}|_V)$ is an isomorphism and thus the homomorphisms

$$H_Z^0(U, \mathcal{O}) \to H^0(U, \mathcal{O}) \qquad \text{and} \qquad H^0(V, \mathcal{O}|_V) \to H_Z^1(U, \mathcal{O})$$

must be zero. But the first homomorphism is monomorphism (this follows directly from the exact sequence) and the second homomorphism is epimorphism (since $H^1(U, \mathcal{O}) = 0$, because U is affine). Thus

$$H_\mathfrak{m}^0(A) = H_Z^0(U, \mathcal{O}) = 0 \qquad \text{and} \qquad H_\mathfrak{m}^1(A) = H_Z^1(U, \mathcal{O}) = 0$$

and $depth_\mathfrak{m}(A_\mathfrak{m}) \geqslant 2$ by Ex. III.3.4 (b).

Podrozdział 3.4

3.4.1 Let $\mathcal{U} = (U_i)_i$ be any affine cover of Y and let $V_i := f^{-1}(U_i)$. Then (since f is affine), $\mathcal{V} := (V_i)_i$ is an affine cover of X. Note that $(f_*\mathcal{F})(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}) = \mathcal{F}(V_{i_0} \cap \dots \cap V_{i_p})$ and thus $C^\bullet(\mathcal{U}, f_*\mathcal{F}) = C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Therefore:

$$\check{H}^i(\mathcal{U}, f_*\mathcal{F}) = h^i(C^\bullet(\mathcal{U}, f_*\mathcal{F})) = h^i(C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})) = \check{H}^i(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

One concludes by using Theorem II.4.5 (since both $\mathcal{F}$ and $f_*\mathcal{F}$ are quasi-coherent, cf. Proposition II.5.8 (c)).

3.4.4

(a) rozważmy naturalne przekształcenie $\lambda^k : \check{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^k(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$:

$$\prod_{i_0, \dots, i_k} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_k}) \ni \qquad (f_{i_0, \dots, i_k})_{i_0, \dots, i_k} \mapsto (f_{\lambda(j_0), \dots, \lambda(j_k)}|_{V_{j_0 \dots j_k}})_{j_0, \dots, j_k} \qquad \in \prod_{j_0, \dots, j_k} \mathcal{F}(V_{j_0 \dots j_k})$$

Ze wzorów łatwo wynika, że komutuje ono z różniczką Cecha: $d_\mathfrak{B}^k \circ \lambda^k = \lambda^{k+1} \circ d_\mathfrak{U}^k$. Stąd indukuje ono naturalne przekształcenie na kohomologiach odpowiednich kompleksów.

(b) rozważmy kompleksy snopów $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ – wtedy dla rozdrobnienia $\mathfrak{B}$ pokrycia $\mathfrak{U}$ istnieje (podobnie jak w (a)) naturalne przekształcenie kompleksów $j_{\mathfrak{U},\mathfrak{B}} : \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$. Ponadto z własności uniwersalności rezolwenty iniektywnej dla każdego pokrycia $\mathfrak{U}$ istnieje morfizm kompleksów $J_\mathfrak{U} : \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{I}^\bullet$, wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do homotopii łańcuchowej. Stąd $J_\mathfrak{U}$ oraz $J_\mathfrak{B} \circ j_{\mathfrak{U},\mathfrak{B}}$ są łańcuchowo homotopijne, więc indukują te same odwzorowania na kohomologiach. Przykładając funktor $\Gamma(X, \cdot)$ oraz biorąc kohomologie uzyskanych kompleksów stwierdzamy, że przekształcenia:

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := h^i(\Gamma(X, \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))) \quad \longrightarrow \quad h^i(\mathcal{I}^\bullet) = H^i(X, \mathcal{F})$$

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := h^i(\Gamma(X, \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))) \quad \longrightarrow \quad \check{H}^i(\mathfrak{B}, \mathcal{F}) := h^i(\Gamma(X, \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{B}, \mathcal{F}))) \quad \longrightarrow \quad h^i(\mathcal{I}^\bullet) = H^i(X, \mathcal{F})$$

są równe.

(c) zanurzmy $\mathcal{F}$ w wiotkim snopie $\mathcal{G}$ i niech $\mathcal{R} = \mathcal{G}/\mathcal{F}$. Wtedy z długiego ciągu dokładnego dla $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{R} \to 0$ dostajemy: $H^1(\mathcal{F}, X) \cong H^0(\mathcal{R}, X) = \Gamma(X, \mathcal{R})$.
Dla dowolnego pokrycia otwartego $\mathfrak{U}$ rozważmy kompleks $\mathcal{D}^\bullet(\mathfrak{U})$ zdefiniowany jako:

$$D^k(\mathfrak{U}) = \prod_{i_1,\ldots,i_k} \mathcal{F}(U_{i_1\ldots i_k})/\mathcal{G}(U_{i_1\ldots i_k}) = \prod_{i_1,\ldots,i_k} \mathcal{P}(U_{i_1\ldots i_k})$$

gdzie $\mathcal{P}$ jest presnopem $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ (snop $\mathcal{R}$ jest usnopowieniem $\mathcal{P}$). Wtedy z długiego ciągu dokładnego dla $0 \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to D^\bullet(\mathfrak{U}) \to 0$ oraz z tego, że $h^k(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{G})) = 0$ dla $k \geqslant 1$ (wiotkość i Proposition III.4.3) dostajemy:

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = h^1(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) \cong h^0(\mathcal{D}^\bullet(\mathfrak{U})) = \ker(d : D^0(\mathfrak{U}) \to D^1(\mathfrak{U}))$$

Ale dla $\alpha = (\alpha_i)_i \in D^0(\mathfrak{U}) = \prod_i \mathcal{P}(U_i)$ mamy: $(d\alpha)_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$, więc $d\alpha = 0$ wtw. gdy $\alpha_i|_{U_i \cap U_j} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j}$, czyli:

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \{(\alpha_i)_i \in \prod_i \mathcal{P}(U_i) : \forall_{i,j} \quad \alpha_i|_{U_i \cap U_j} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j} \qquad (*)\}$$

Z definicji usnopowienia:

$$H^1(\mathcal{F}, X) = \Gamma(X, \mathcal{R}) = \left\{ (s_P) \in \prod_{P \in X} \mathcal{P}_P : \exists_{\mathfrak{B} = (V_j)_j \text{ – pokrycie otw.}} \quad \exists_{f_j \in \mathcal{P}(V_j)} : \forall_{Q \in V_j} \quad (f_j)_Q = s_Q \qquad (**) \right\}$$

Rozważmy naturalne przekształcenia

$$\Gamma : \lim_{\mathfrak{U}} h^0(\mathcal{D}^\bullet(\mathfrak{U})) \to H^1(\mathcal{F}, X), \qquad \Gamma((\alpha_i)_i) = \Big((\alpha_{i(P)})_P \Big)_P$$

gdzie $(\alpha_i)_i \in h^0(\mathcal{D}^\bullet(\mathfrak{U}))$, $i(P)$ jest dowolne takie, że $P \in U_{i(P)}$, zaś $(\alpha_{i(P)})_P$ oznacza kiełek $\alpha_{i(P)}$ w punkcie P (z warunku $(*)$ wynika, że nie zależy on od wyboru $i(P)$) oraz

$$\Phi : H^1(\mathcal{F}, X) \to \lim_{\mathfrak{U}} h^0(\mathcal{D}^\bullet(\mathfrak{U})), \qquad \Phi((s_P)_P) = (f_i)_i \in h^0(\mathcal{D}^\bullet(\mathfrak{U}))$$

gdzie $\mathfrak{B}$, f_i są dowolne spełniające warunek (**).
Z definicji wynika w oczywisty sposób, że Γ, Φ są wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami, co kończy dowód.

3.4.5 Z poprzedniego zadania: $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \lim_{\mathfrak{U}} \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$. Niech $\mathcal{L}$ będzie dowolnym snopem odwracalnym na X – wtedy z definicji $\mathcal{L}$ jest lokalnie wolny rangi 1, więc istnieje pokrycie $\mathfrak{U} = (U_i)_i$ oraz izomorfizmy $\varphi_i : \mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{L}|_{U_i}$. Wtedy $\varphi_{ij} := \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ jest automorfizmem $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ jako $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$-modułu. Dowolny taki automorfizm jest jednak postaci:

$$f : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}(V) \to \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}, \qquad f(x) = a \cdot x$$

gdzie $a = f(1) \in \mathcal{O}^*_{U_i \cap U_j}$. Stąd dowolny snop $\mathcal{L}$ odpowiada elementowi $(a_{ij})_{i,j} \in \prod_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^* =: C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$ (gdzie $a_{ij} := \varphi_{ij}(1)$). Z tego, że

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki} = id \qquad (*)$$

dostajemy: $a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki} = 1$, więc $(a_{ij})_{i,j}$ jest kocyklem kohomologii Cecha.

Na odwrót, jeżeli $(a_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$ jest kocyklem w kohomologii Cecha pewnego pokrycia, to odpowiadają mu jednoznacznie automorfizmy $(\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{O}_{U_i \cap U_j})_{ij}$. Z zadania II.1.22 snopy $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ możemy skleić za pomocą $(\varphi_{ij})_{i,j}$ do pewnego snopu odwracalnego $\mathcal{L}$.

Standardowe przeliczenie pokazuje, że klasa kohomologii nie zależy od wybranego pokrycia, i że powyższe przyporządkowania są wzajemnie odwrotne. Ponadto są one homomorfizmami – załóżmy, że mamy dane dwa snopy odwracalne $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ które są wolne na pewnym pokryciu $\mathfrak{B} = (V_j)_j$ z izomorfizmami: $\varphi_i : \mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{L}|_{U_i}$, $\psi_i : \mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{M}|_{U_i}$, to snop $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ jest wolny na $\mathfrak{B}$ z izomorfizmami:

$$\varphi_i \otimes \psi_i : \mathcal{O}_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{U_i}} \mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{L}|_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{U_i}} \mathcal{M}|_{U_i}$$

czyli snop $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ odpowiada iloczynowi klas kohomologii.

3.4.6 Zauważmy, że obraz odwzorowania $\mathcal{I} \to \mathcal{O}_X$, $a \mapsto 1 + a$ leży w $\mathcal{O}_X^*$ – istotnie: $(1-a)\cdot(1+a) = 1 - a^2 = 1$, bo $\mathcal{I}^2 = 0$.

Dokładność tego ciągu wystarczy sprawdzić na źdźbłach. Niech $x \in X$ – wtedy:

- $\mathcal{I}_x \to \mathcal{O}_{X,x}^*$, $a \mapsto 1 + a$ jest w oczywisty sposób iniekcją,
- $a \in \ker\left(\mathcal{O}_{X,x}^* \to \mathcal{O}_{X_0,x}^* = (\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x)^*\right)$ wtw. gdy $a = 1$ w $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x$, czyli gdy $a \equiv 1 \pmod{I_x}$, czyli gdy $a \in im(\mathcal{I}_x \to \mathcal{O}_{X,x}^*)$,
- jeżeli $\overline{a} \in \mathcal{O}_{X_0,x}^* = (\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x)^*$, to $ab \equiv 1 \pmod{\mathcal{I}_x}$ dla pewnego b, oraz $(ab-1)^2 \in \mathcal{I}_x^2 = 0$. Stąd $a \cdot (2b - ab^2) = 1$, więc $a \in \mathcal{O}_{X,x}^*$.

Biorąc długi ciąg kohomologii od podanego ciągu i i korzystając z zadania 4.5 dostajemy drugą część tezy.

Podrozdział 3.5

3.5.2

(a) Let $X \subset \mathbb{P}^r$, $M := \Gamma_*(\mathcal{F})$. Let us suppose WLOG that $Supp(\mathcal{F}) \cap D_+(x_r) \neq 0$. Consider the exact sequence:

$$0 \to \ker\left(M(-1) \stackrel{\cdot x_r}{\to} M\right) \to M(-1) \stackrel{\cdot x_r}{\to} M \to M/x_rM \to 0.$$

By "sheafifing" this sequence we obtain:

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{F}(-1) \stackrel{\cdot x_r}{\to} \mathcal{F} \to \mathcal{L} \to 0.$$

Thus, by twisting and taking Euler characteristics:

$$\chi(\mathcal{R}(n)) - \chi(\mathcal{F}(n-1)) + \chi(\mathcal{F}(n)) - \chi(\mathcal{L}(n)) = 0.$$

Note that $\mathcal{F}(-1) \stackrel{\cdot x_r}{\to} \mathcal{F}$ is an isomorphism over $D_+(x_r)$, since x_r is invertible over there. Thus $Supp(\mathcal{R}), Supp(\mathcal{L}) \subsetneq Supp(\mathcal{F})$ and $dim(Supp(\mathcal{L})), dim(Supp(\mathcal{R})) < Supp(\mathcal{F})$. We can apply induction hypothesis, to get that $\chi(\mathcal{R}(n)), \chi(\mathcal{L}(n))$ are numerical polynomials. Thus $\chi(\mathcal{F}(n)) - \chi(\mathcal{F}(n-1))$ is also a numerical polynomial and thus by Proposition I.7.3 (b) $\chi(\mathcal{F}(n))$ is a numerical polynomial.

(b) By Theorem 5.2 (b) for $n \gg 0$:

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \sum_i (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F}(n)) = \dim_k H^0(X, \mathcal{F}(n)) - 0 + 0 + \dots.$$

By Ex. II.5.9(b) we have $H^0(X, \mathcal{F}(n)) = M_n$ for $n \gg 0$. This ends the proof.

3.5.10 It suffices to show that if $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ is an exact sequence of coherent sheaves over X then for $n \gg 0$ the sequence: $\Gamma(\mathcal{F}(n), X) \to \Gamma(\mathcal{G}(n), X) \to \Gamma(\mathcal{H}(n), X)$ is exact. We have:

$$0 \to \ker f \to \mathcal{G} \to im(g) \to 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \to \ker f(n) \to \mathcal{G}(n) \to im(g)(n) \to 0$$

$$0 \to \Gamma(X, \ker f(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{G}(n)) \to \Gamma(X, im(g)(n)) \to H^1(X, \ker f(n)) = 0 \qquad (*)$$

(where $H^1(X, \ker f(n)) = 0$ for $n \gg 0$ by Serre vanishing). Now note that (since ker doesn't need sheafification)

$$\Gamma(X, \ker f(n)) = \ker\Big(\Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{G}(n))\Big). (**)$$

Moreover, let $\mathcal{K} := \ker(g)$, $\mathcal{I} := im(g)$. Then:

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{G} \to \mathcal{I} \to 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \to \Gamma(X, \mathcal{K}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{G}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{I}(n)) \to H^1(X, \mathcal{K}(n)) = 0$$

(where $H^1(X, \mathcal{K}(n)) = 0$ for $n \gg 0$ by Serre vanishing). Thus:

$$\Gamma(X, \mathcal{I}(n)) = \Gamma(X, \mathcal{G}(n))/\Gamma(X, \mathcal{K}(n)) = \Gamma(X, \mathcal{G}(n)) \Big/ \ker\Big(\Gamma(X, \mathcal{G}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{H}(n))\Big) = im\Big(\Gamma(X, \mathcal{G}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{H}(n))\Big)$$

Therefore by $(*)$, $(**)$ and $(***)$:

$$0 \to \ker\Big(\Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{G}(n))\Big) \to \Gamma(X, \mathcal{G}(n)) \to im\Big(\Gamma(X, \mathcal{G}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{H}(n))\Big) \to 0,$$

which is in turn equivalent to $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{G}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{H}(n)) \to 0$. This ends the proof.

Podrozdział 3.6

3.6.8

(a) Let K be the function field of X. Let $x \in X$ be a closed point and let U be its open neighbourhood. We'll show that $x \in X_s \subset U$ for some $\mathcal{L}$, $s \in \mathcal{L}(X)$. Let $Z := X \backslash U$.

Case I: $Z = \{\xi\}$ **is irreducible.**

Note that (since $x \notin Z$) $\mathcal{O}_x \not\subset \mathcal{O}_\xi$. Let $f \in K$ satisfy $f \in \mathcal{O}_x$, $f \notin \mathcal{O}_\xi$. We define $s := 1/f \in K^*$. Consider the divisor $D := (s)_\infty$ – then $x \notin Supp(D)$, $\xi \in Supp(D)$. Now we have:

$$\mathcal{L}(D)(X) = \{g \in K^* : div(g) + D \geqslant 0\} \cup \{0\}$$

and thus s may be interpreted as a global section of $\mathcal{L}(D)$. Moreover:

$$X_s = \{y \in X : s_y \notin \mathfrak{m}_y \mathcal{L}(D)_y\} = \{y \in X : y \notin Supp(s)_0\} = (Supp\,(s)_0)'.$$

Finally, we have $\xi \in Supp\,(s)_0$ and thus (since $Supp\,(s)_0$ is closed) $Z = \overline{\{\xi\}} \subset Supp\,(s)_0$, $X_s = (Supp\,(s)_0)' \subset Z' = U$. Moreover, $x \notin Supp\,(s)_0$ implies $x \in (Supp\,(s)_0)' = X_s$. This ends the proof in this case.

Case II: Z **is arbitrary.**

Let $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$ be the decomposition into irreducible components. Let us denote $U_i = X \backslash Z_i$. Then, by case I we have $X_{s_i} \subset U_i$ and $x \in X_{s_i}$ for some $s_i \in \mathcal{L}_i(X)$. Let $s := s_1 \otimes \ldots \otimes s_r \in (\mathcal{L}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_r)(X)$. Then $X_s = \bigcap_i X_{s_i}$ – thus $x \in X_s$, $X_s \subset U$. Indeed:

$$X_s = \{y \in X : s_y \neq 0 \text{ in } \mathcal{L}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \kappa(y)\} =$$

(let $V_i^{(y)} := (\mathcal{L}_1)_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \kappa(y)$ we treat it as a $\kappa(y)$ – vector space)

$$= \{y \in X : s_1 \otimes \ldots \otimes s_r \neq 0 \text{ in } V_1^{(y)} \otimes \ldots \otimes V_r^{(y)}\} =$$

(since in vector spaces for $v_i \in V_i$ we have $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n = 0$ iff $v_j = 0$ for some j)

$$= \{y \in X : s_i \neq 0 \text{ in } V_i^{(y)} \text{ for all } i\} = \bigcap_i X_{s_i}.$$

(b) Note that X may be covered by a finite family of open sets $(U_i)_i$ such that $\mathcal{O}^{\oplus k_i}|_{U_i} \to \mathcal{F}|_{U_i} \to 0$ (it suffices e.g. to take an affine cover, since coherent sheaves over affine schemes are globally generated). By (a) we can WLOG assume that $U_i = X_{s_i}$ for some $s_i \in \mathcal{L}_i(X)$. We are going to extend the morphism $\mathcal{O}^{\oplus k_i}|_{U_i} \to \mathcal{F}|_{U_i}$ to a morphism $\mathcal{O}^{\oplus k_i} \to \mathcal{F}$, which is not necesarily surjective.

Let $x_1, \ldots, x_{k_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ be the images of generators of $\mathcal{O}^{\oplus k_i}|_{U_i}$. Note that X is separable and thus the intersection of any two affine sets is affine – thus X satisfies the assumptions of Lemma II.5.14(b). Using this lemma, we may find n_i such that $x_1 \cdot s_i^{n_i}, \ldots, x_{k_i} \cdot s_i^{n_i}$ extend to $y_1^{(i)}, \ldots, y_{k_i}^{(i)} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_i^{n_i}(X)$. In this way we obtain morphism $\mathcal{O}^{\oplus k_i} \to \mathcal{F}$ (given by $(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \mapsto y_j^{(i)}$) that is surjective on U_i. After tensoring: $(\mathcal{L}^{\otimes -n_i})^{\oplus k_i} \to \mathcal{F}$.

Finally, we obtain morphism $\oplus_i (\mathcal{L}^{\otimes -n_i})^{\oplus k_i} \to \mathcal{F}$ that is surjective on each U_i – thus it is surjective on X.

Podrozdział 3.7

3.7.1 Firstly, let us notice that if $\mathcal{M}$ is an invertible sheaf on an integral scheme X and $H^0(X, \mathcal{M}) \neq 0$ then for any $n \geqslant 0$: $H^0(X, \mathcal{M}^{\otimes n}) \neq 0$. Indeed, let $f \in H^0(X, \mathcal{M})$, $f \neq 0$. Then $f^{\otimes n} \in H^0(X, \mathcal{M}^{\otimes n})$. Let $x \in Supp(f)$, i.e. $f_x \neq 0$ in $\mathcal{M}_x \cong \mathcal{O}_{X,x}$. Then also $f^{\otimes n} = f^n \neq 0$ in $\mathcal{M}_x^{\otimes n} \cong \mathcal{O}_{X,x}$. Thus $H^0(X, \mathcal{M}^{\otimes n}) \neq 0$.

Since $\mathcal{L}$ is ample, $\mathcal{L}^{\otimes N} \cong O_X(1)$ for some $N > 0$ and $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$. Let us suppose that $H^0(X, \mathcal{L}^{-1}) \neq 0$. Then:

$$0 \neq H^0(X, \mathcal{L}^{-\otimes N}) = H^0(X, \mathcal{O}_X(-1)).$$

We'll show that this is impossible. Any global section of $\mathcal{O}_X(-1)$ is given by a set of sections $t_i \in H^0(D_+(x_i), \mathcal{O}_X(-1))$ such that $t_i = t_j$ after restriction to $D_+(x_ix_j)$. But if S is a homogeneous coordinates ring of X, then

$$H^0(D_+(x_i), \mathcal{O}_X(-1)) = S(-1)_{((x_i))} = \left\{ \frac{c}{x_i} : c \in k \right\}.$$

Let $t_i = \frac{c_i}{x_i}$ – then we must have:

$$\frac{c_i}{x_i} = \frac{c_j}{x_j}$$

in $S(-1)_{((x_ix_j))}$ or (since X is integral) in $K := Frac(S)$. Thus, either all c_i's are zero, or all are non-zero and $X \subset \bigcup_{i,j} V(c_ix_j - c_jx_i)$, which is impossible for X of dimension $\geqslant 1$.

3.7.3 Consider the Euler exact sequence:

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n/k} \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus(n+1)} \to \mathcal{O} \to 0.$$

By Ex. II.5.16 (c) for any $p \geqslant 1$ there exists filtration of sheaves:

$$\bigwedge^p \mathcal{O}(-1)^{n+1} = \mathcal{F}^0 \supset \ldots \supset \mathcal{F}^{p+1} = 0,$$

such that:

$$\mathcal{F}^k/\mathcal{F}^{k+1} \cong \bigwedge^k \Omega_{\mathbb{P}^n/k} \otimes \bigwedge^{p-k} \mathcal{O} = \begin{cases} 0, & k \leqslant p-2 \\ \Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n/k}, & k = p-1 \\ \Omega^p_{\mathbb{P}^n/k}, & k = p \end{cases}.$$

(since $\mathcal{O}$ has rank 1 and $\bigwedge^2 \mathcal{O} = 0$). Thus we get an exact sequence:

$$0 \to \Omega^p_{\mathbb{P}^n/k} \to \bigwedge^p(\mathcal{O}(-1)^{n+1}) \to \Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n/k} \to 0. \qquad (*)$$

Moreover, using the formula $\bigwedge^p(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k+l=p} \bigwedge^k V \otimes \bigwedge^l W$ we get:

$$\bigwedge^p(\mathcal{O}(-1)^m) = \bigoplus_{k_1+\ldots+k_m=p} \bigwedge^{k_1} \mathcal{O}(-1) \otimes \ldots \otimes \bigwedge^{k_m} \mathcal{O}(-1) =$$

(since $\bigwedge^2 \mathcal{O}(-1) = 0$)

$$= \bigoplus_{\substack{k_1+\ldots+k_m=p \\ k_i \in \{0,1\}}} \bigwedge^{k_1} \mathcal{O}(-1) \otimes \ldots \otimes \bigwedge^{k_m} \mathcal{O}(-1) =$$

$$= \text{sum of sheafs of form } \mathcal{O}(n), \text{ where } n < 0.$$

Thus, by applying the long exact sequence of cohomology to $(*)$ we obtain that

$$H^i(\mathbb{P}^n, \Omega^p) \cong H^{i-1}(\mathbb{P}^n, \Omega^{p-1}) \qquad (**)$$

for $1 \leqslant i \leqslant n-1$ and $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^p) = 0$. Thus by Corollary 7.13. we have also $H^n(\mathbb{P}^n, \Omega^p) = 0$. Finally, note that $\Omega^n = \omega_{\mathbb{P}^n/k} = \mathcal{O}(-n-1)$ and thus

$$H^i(\mathbb{P}^n, \Omega^n) = \begin{cases} 0, & i \neq n \\ k, & i = n \end{cases}.$$

Therefore, we obtain the proof using $(**)$, by downward induction on p.

Podrozdział 3.8

3.8.1 Note that flasque sheaves are f_*-acyclic by Corollary II.8.3 and thus we can compute higher direct images by using flaque resolvents. Let $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ be a flasque resolution. Then $f_* I^\bullet$ is also flasque (by ex. II.1.16(d)) and moreover it is exact (since $h^i(f_*\mathcal{I}^\bullet) = R^i f_* \mathcal{F} = 0$ for $i > 0$). Thus $0 \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{I}^\bullet$ is a flasque resolution and:

$$H^i(Y, f_*\mathcal{F}) = h^i(\Gamma(Y, f_*\mathcal{I}^\bullet)) = h^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) = H^i(X, \mathcal{F}).$$

3.8.2 By Ex. II.8.1 it suffices to show that $R^i f_* \mathcal{F} = 0$ for $i > 0$. Let $V = Spec(A) \subset Y$ be any open affine subset. Then since f is affine, $f^{-1}(V) = Spec(B)$ for some A-algebra B. Then using Corollary II.8.2, Proposition II.8.5 and Theorem II.3.5:

$$R^i f_*(\mathcal{F})|_V = R^i f_*(\mathcal{F}|_{f^{-1}(V)}) = H^i(Spec(B), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)})^\sim = 0.$$

Thus $R^i f_*(\mathcal{F})|_{V_i} = 0$ for an affine open cover $(V_i)_i$ of Y and $R^i f_*(\mathcal{F}) = 0$.

Podrozdział 3.9

3.9.1 f is of finite type, thus by Chevalley theorem (ex. II.3.19) the set $f(U)$ is constructible. Thus by ex. II.3.18 it suffices to show that $f(U)$ is closed under generalisation. Let $x \in U$, $y \rightsquigarrow f(x)$; we'll show that $y \in f(U)$. Let $Spec(A) \subset Y$ be any affine open set containing $f(x)$. Then $y \in Spec(A)$ (since $Spec(A)$ is closed under generalisation). Note that $f^{-1}(Spec(A))$ is open; therefore we can pick an open affine neighbourhood $Spec(B)$ of x. Let . The proof follows by applying the going down theorem for flat homomorphisms – we will prove it in a series of lemmas:

Definition An A-module M is faithfully flat iff it is flat and $M \otimes_A N = 0$ implies $N = 0$ for all A-modules N or equivalently, if $N \to N' \to N''$ is exact iff $M \otimes_A N \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N''$ is exact.

Lemma A flat A-module M is faithfully flat iff $M \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0$ for every $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ iff $M \otimes \kappa(\mathfrak{m}) \neq 0$ for every maximal $\mathfrak{m} \in Spec(A)$.
Proof: ($\Rightarrow$) is trivial.
($\Leftarrow$) suppose $M \otimes_A N = 0$. WLOG N is finitely generated. Let us fix an maximal ideal $\mathfrak{m}$ and let $M' := M_\mathfrak{m}$, $N' = N_\mathfrak{m}$, $k = \kappa(\mathfrak{m})$. Then also $M'_k \otimes_k N'_k = 0$ (where $M_k := M \otimes_A k$) and thus (since by assumption $M'_k \neq 0$) $N'_k = 0$. Thus by Nakayama's lemma $N' = 0$. Thus $N_\mathfrak{m} = 0$ for all maximal $\mathfrak{m}$ and thus $N = 0$.

Lemma Flat homomorphism $A \to B$ is faithfully flat iff $Spec(B) \to Spec(A)$ is surjective iff every maximal ideal of A is contained in the image of $Spec(B) \to Spec(A)$.
Proof: flat $A \to B$ is is faithfully flat iff $B \otimes \kappa(\mathfrak{m}) \neq 0$ for every maximal $\mathfrak{m} \in Spec(A)$, but $Spec(B \otimes \kappa(\mathfrak{m})) \cong f^{-1}(\mathfrak{m})$ topologically.

Theorem (going-down for flat morphisms) Let $A \to B$ be flat. Suppose that $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ are prime ideals of $Spec(A)$ and that $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}' \cap A$ for some $\mathfrak{p}' \in Spec(A)$. Then $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$ for some prime $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$.
Proof: note that homomorphism $A_{\mathfrak{q}'} \to B_{\mathfrak{p}'}$ is local homomorphism – thus by the previous lemma it is faithfully flat. Thus it is surjective. This ends the proof.

3.9.4

(Proof based on [Matsumura, Commutative Ring Theory, Theorem 24.3])

WLOG we can assume that $X = Spec(B)$ and $Y = Spec(A)$, where A and B are Noetherian and B is an A-algebra of finite type.

Lemma ("topological Nagata criterion") Let A be Noetherian. A set $U \subset Spec(B)$ is open iff:

(1) it is closed under generalisation: if $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{q} \in U$, then $\mathfrak{p} \in U$.

(2) if $\mathfrak{p} \in U$, then U contains a non-empty open subset of $V(\mathfrak{p})$.

Proof: ($\Rightarrow$) is obvious.
($\Leftarrow$) Let $U' := Spec(B) \backslash U$, $Z = \overline{U'}$ and let $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$ be the decomposition into irreducible components. Let $Z_i = \overline{\{\xi_i\}}$.
Let us suppose firstly, that $\xi_i \in U$. Then by (2) for each i there exists a closed set $D_i \subsetneq V_i$ such that $U' \subset D_i \cup \{\mathfrak{p} : \xi_i \notin \mathfrak{p}_i\} = D_i \cup \{\mathfrak{p} \notin Z_i\}$ and $\xi_i \notin D_i$. Thus $U' \subset D_i \cup \bigcup_{j \neq i} Z_j$. This yields contradiction with irreducible decomposition.

Thus $\xi_i \in Z\backslash U$. But then by (1) we have $Z_i = V(\xi_i) \subset U'$ and thus U' is closed.

We check the conditions (1) & (2) of the topological Nagata criterion:

(1) suppose that for $\mathfrak{q} \in Spec(B)$, $\mathfrak{q}' := \mathfrak{q} \cap A$, $B_{\mathfrak{q}}$ is an $A_{\mathfrak{q}'}$-flat module and $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}' := \mathfrak{p} \cap A$. Then by localising at $\mathfrak{p}$ and using Proposition 9.1A (d) we see that $B_{\mathfrak{p}}$ is an $A_{\mathfrak{p}'}$-flat module. ???? ??????

(2)

3.9.A (Ravi Vakil, 24.2.J.) Suppose $\pi : X \to Y$ is a flat morphism of locally Noetherian schemes. Show that any associated point of X must map to an associated point of Y.

Solution:

Suppose that $\varphi : (A, \mathfrak{m}_A) \to (B, \mathfrak{m}_B)$ is a local homomorphism of local Noetherian rings. Suppose that $\mathfrak{m}_B$ is not an associated prime, we'll show that $\mathfrak{m}_A$ is an associated prime. ?????????????

Podrozdział 3.10

3.10.1

Regularity: note that (as k_0-algebras):

$$A(X) := k[x, y]/(y^2 - x^p + t) = k_0(t)[x, y]/(y^2 - x^p + t) \cong k_0[x, y]_{(x^p - y^2)}.$$

But the last ring is the ring of regular functions on $D(x^p - y^2) \subset \mathbb{A}^2_{k_0}$. Therefore, it suffices to note that $\mathbb{A}^2_{k_0}$ is regular and an open subscheme of a regular scheme is regular.

Non-smoothness: Let $A := A(X) = k[x, y]/(y^2 - x^p + t)$. Then $\Omega_{X/k} = \widetilde{\Omega}_{A/k}$ and

$$\Omega_{A/k} = \frac{A\,dx \oplus A\,dy}{\Big(d(y^2 - x^p + t)\Big)} = \frac{A\,dx \oplus A\,dy}{A \cdot y \cdot dy}.$$

Let $\mathfrak{p} := (x^p - t, y) \trianglelefteq A$. Then $A/\mathfrak{p} \cong k_0(\sqrt[p]{t})$ and therefore $\mathfrak{p}$ is a maximal ideal of A. Thus:

$$\Omega_{A/k} \otimes_A A/\mathfrak{p} \cong \Omega_{A/k} \Big/ \mathfrak{p}\Omega_{A/k} = \frac{A\,dx \oplus A\,dy}{A \cdot y \cdot dy + A \cdot y \cdot dx + A \cdot (x^p - t) \cdot dx + A \cdot (x^p - t) \cdot dy} =$$

$$= \frac{k_0(t)[x]}{(x^p - t)}\,dx \oplus \frac{k_0(t)[x]}{(x^p - t)}\,dy = k_0(\sqrt[p]{t})\,dx + k_0(\sqrt[p]{t})\,dy$$

and $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} \Omega_{X/k} \otimes \kappa(\mathfrak{p}) = 2$. Thus X/k is not smooth.

3.10.6 Recall that the normalization of X is given by:

$$\phi : \widetilde{X} := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t] \to X, \quad t \mapsto (y(t), x(t)) := (t \cdot (t^2 - 1), t^2 - 1).$$

Lemma The normalization homomorphism:

$$\mathbb{C}[\overline{x}, \overline{y}] := \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2) \to \mathbb{C}[t], \quad (x, y) \mapsto (t^2 - 1, t \cdot (t^2 - 1))$$

identifies $\mathbb{C}[\overline{x}, \overline{y}]$ with the ring:

$$A := \{f(t) \in \mathbb{C}[t] : f(-1) = f(1)\}.$$

Slogan: „nodal curve is $\mathbb{A}^1$ with -1 and 1 identified".
Proof: ??

Let $Y = \operatorname{Spec} R_2$, where:

$$R_2 = \{(P_1(t_1), P_2(t_2)) \in k[t_1] \oplus k[t_2] : P_1(-1) = P_2(1)\}$$

(we glue two copies of $\mathbb{A}^1$ by glueing -1 to 1 and 1 to -1) and let $Y \to X$ be given by $A \to R_2$, $W(t) \mapsto (W(t_1), W(t_2))$. We'll show that $\Psi : Y \to X$ is finite étale of degree 2. Recall that an equivalent definition for this is that $\Psi_* \mathcal{O}_{Y'}$ is a locally free $\mathcal{O}_X$-module (of finite rank) and fiber over each $P \in X$ is a spectrum of a finite étale $\kappa(P)$-algebra.

Note that out of $(0,0)$, $Y \to X$ is a trivial covering by 2 copies of $X \backslash \{(0,0)\}$. Thus it suffices to check the neighbourhood of $(0,0)$ (corresponding to $t = \pm 1$). Note however, that $R_2[1/t]$ is a free $A[1/p]$-module of rank 2 with basis $(1,1)$, $(t_1, -t_2)$. Indeed, for any $(P_1, P_2) \in R_2$:

$$(P_1, P_2) = \frac{P_1(t) + P_2(t)}{2} \cdot (1,1) + \frac{P_1(t) - P_2(t)}{2t} \cdot (t_1, -t_2),$$

where $\frac{P_1(t)+P_2(t)}{2}, \frac{P_1(t)-P_2(t)}{2t} \in A$. Note also that the fiber over $(0,0)$ is of degree 2 and contains 2 points. Thus it must be the spectrum of $\prod_{i=1}^{2} k$. This means that Ψ is finite étale.

Remark 1: usually one glues schemes along **open** subschemes, but affine schemes may be always glued along **closed** subschemes, cf. Schwede, Gluing Schemes and a Scheme Without Closed Points.

Remark 2: similarly, if $\overline{k} = k$ and $\operatorname{char} k = 0$, one can construct a connected finite étale covering of X of degree n, formed by glueing n copies of $\mathbb{A}^1$: we glue $-1 \in \mathbb{A}^1_{(1)}$ to $1 \in \mathbb{A}^1_{(2)}$, etc.

4. Curves

Podrozdział 4.2

4.2.5

(a) **First part:** suppose that $f(P) = f(P') = Q$. Then (by definition of Y) there exists $\psi \in Aut(X)$ such that $P' = \psi(P)$. Moreover, $f \circ \psi = f$, also by definition of f and Y as the quotient by $Aut(X)$. Therefore (using $e_{g \circ h}(P) = e_h(P) \cdot e_g(h(P))$):

$$e_f(P') = e_f(\psi(P)) = e_\psi(P) \cdot e_f(\psi(P)) = e_{f \circ \psi}(P) = e_f(P) = r.$$

Thus:

$$n = \deg f = \sum_{P' \in f^{-1}(Q)} e_f(P') = r \cdot \# f^{-1}(Q)$$

and $\# f^{-1}(Q) = n/r$.

Second part: using Riemann-Hurwitz formula:

$$2(g(X)-1) = 2(g(Y)-1) \cdot n + \sum_{P'} (e_f(P')-1) = 2(g(Y)-1) \cdot n + \sum_Q \sum_{P' \in f^{-1}(Q)} (e_f(P')-1) = 2(g(Y)-1) \cdot n + \sum_i (r_i - 1) \cdot \frac{n}{r_i}$$

and by dividing by n we get the desired formula.

(b) Let $g' := g(Y)$. If $g' \geqslant 1$ then:

$$(2g'-2) + \sum_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{r_i}) \geqslant 0 + \frac{1}{2}.$$

Now we suppose that $g' = 0$. Suppose that $s \geqslant 5$. Then:

$$-2 + \sum_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{r_i}) \geqslant -2 + (1 - \frac{1}{2}) \cdot s \geqslant -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

If $s \in \{0, 1, 2\}$ then this sum is negative so that we must have $s \in \{3, 4\}$. If $s = 4$ and this sum is positive then

$$-2 + \sum_{i=1}^{4} (1 - \frac{1}{r_i}) \geqslant -2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

If $s = 3$, we want find minimal positive value of

$$1 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}$$

over all $r_i \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Let WLOG $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$.

1^o If $r_1 \geqslant 3$ then the minimal positive value is $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$,

2^o If $r_1 = 2$ we consider the following cases:

$2^o A$ $r_2 \geqslant 4$ – then the minimal positive value is $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$,

$2^0 B$ $r_2 = 3$ – then the minimal positive value is $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$.

Thus the minimal positiove value is $\frac{1}{42}$ for $(g', s, r_1, r_2, r_3) = (0, 3, 2, 3, 7)$.
Finally, we obtain that if this expression is positive, it must be $\geqslant \frac{1}{42}$ and thus:

$$(2g-2)/n = 2(g(Y)-1) + \sum_i (1 - \frac{1}{r_i}) \geqslant \frac{1}{42},$$

yielding $n \leqslant 84(g-1)$.

5. Surfaces

Subsection 5.1

5.1.1 Exactly as in proof of Proposition 5.4.1:

$$C.D \quad = \quad \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_{C\cap D}) = \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{L}(-D) \otimes \mathcal{O}_C).$$

By the exact sequences:

$$0 \to \mathcal{L}(-C) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_C \to 0$$

$$0 \to \mathcal{L}(-D) \otimes \mathcal{L}(-C) \to \mathcal{L}(-D) \to \mathcal{L}(-D) \otimes \mathcal{O}_C \to 0$$

and additivity of Euler characteristic on exact sequences we obtain:

$$\chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{L}(-D) \otimes \mathcal{O}_C) = \Big(\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}(-C))\Big) - \Big(\chi(\mathcal{L}(-D)) - \chi(\mathcal{L}(-D) \otimes \mathcal{L}(-D))\Big),$$

which is the desired formula.

5.1.2 Note that an equivalent form of Riemann-Roch for surfaces is:

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \frac{1}{2}D.(D-K) + 1 + p_a.$$

By substituting $D := nH$ we obtain:

$$\chi(\mathcal{L}(H)^{\otimes n}) = \frac{1}{2}H.H \cdot n^2 - \frac{1}{2}D.K \cdot n + (1+p_a)$$

(note that LHS is by the definition the Hilbert polynomial of X). Moreover, by adjunction formula, $H.K = -H^2 + 2(\pi - 1)$. Thus

$$\chi(\mathcal{L}(H)^{\otimes n}) = \frac{1}{2}H.H \cdot n^2 + (H^2 + 1 - \pi) \cdot n + (1+p_a)$$

and the proof follows.
To show the second statement, we have to evaluate

$$\chi(\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}(H)^{\otimes n}) = \chi(\mathcal{O}(H)^{\otimes n}) - \chi(\mathcal{O}(-C) \otimes \mathcal{O}(H)^{\otimes n})$$

(the equality follows from additivity on exact sequences). To evaluate $\chi(\mathcal{O}(-C) \otimes \mathcal{O}(H)^{\otimes n})$, substitute $D := nH - C$ in the above form of Riemann-Roch. Then we obtain:

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}(H)^{\otimes n}) - \chi(\mathcal{O}(-C) \otimes \mathcal{O}(H)^{\otimes n}) \quad &= \quad \left(\frac{1}{2}nH.(nH-K) + 1 + p_a\right)\\ &- \quad \left(\frac{1}{2}(nH-C).(nH-C-K) + 1 + p_a\right)\\ &= \quad n \cdot H.C - C.(C+K)\end{aligned}$$

and the proof follows.
(Remark: the degree of a variety of dimension r in $\mathbb{P}^n$ may be also computed as a number of intersection points with a linear subspace of codimension r in general position)

5.1.3 (a) By additivity:

$$\chi(\mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}(-D)) = 1 + p_{a,X} - \chi(\mathcal{L}(-D))$$

By Riemann-Roch:

$$\chi(\mathcal{L}(-D)) = \frac{1}{2}D.(D+K) + 1 + p_{a,X}$$

Thus $2p_{a,D} - 2 = -2 \cdot \chi(\mathcal{O}_D) = -2 \cdot (1 + p_{a,X} - \frac{1}{2}D.(D+K) + 1 + p_{a,X}) = D.(D+K)$.

(b) Follows from (b), since the intersection product depends only on the equivalence class.

(c) ???

5.1.4 (a) Let D be X treated as a divisor of $\mathbb{P}^3$. Note that X is a hypersurface of degree d and thus $D \sim dH$, where H is any hypersurface on $\mathbb{P}^3$. Thus by Adjunction Formula from II.8 and by $\omega_{\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}(-4)$:

$$K_X = (K_{\mathbb{P}^3} + D)|_X = (-4H + dH)|_X = (d-4)H.$$

(note that we treat H also as a very ample divisor on X) Moreover, by 1.2, $1 = (\text{degree of } \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3) = C.H$. Using the Adjunction Formula from V.1:

$$2 \cdot 0 - 2 = C.(C + K_X) = C.(C + (d-4)H).$$

Using the above facts we see that $C^2 = 2 - d$.

(b) Let $d \geqslant 3$ and $f = x^d + y^d + xz^{d-1} + yw^{d-1}$ and let X be the surface in $\mathbb{P}^3$ defined by f. Note that $(f) \subset (x, y)$ and thus the line $x = y = 0$ is contained in X. We have to check now that it is non-singular. Consider the affine part defined by $w \neq 0$. By computing partial derivatives, we obtain a system of equations:

$$\begin{cases} x^d + y^d + xz^{d-1} + y = 0 \\ dx^{d-1} + (d-1) \cdot z^{d-1} = 0 \\ dy^{d-1} + 1 = 0 \\ (d-1)xz^{d-2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^d + y^d + xz^{d-1} + y = 0 \\ dy^{d-1} + 1 = 0 \\ x = z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^d + y = 0 \\ dy^{d-1} + 1 = 0 \\ x = z = 0 \end{cases}$$

which easily leads to a contradiction. Now we check the affine part $x \neq 0$:

$$\begin{cases} 1 + y^d + z^{d-1} + yw^{d-1} = 0 \\ dy^{d-1} + w^{d-1} = 0 \\ (d-1)z^{d-2} = 0 \\ (d-1)yw^{d-2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 + y^d + z^{d-1} + yw^{d-1} = 0 \\ y = w = z = 0 \end{cases}$$

which again leads to a contradiction. Analogously one checks affine subspaces $z \neq 0$, $y \neq 0$.

5.1.5 (a) Again, as in ex. V.1.4, $K_X = (d-4)H$, where H is the very ample divisor. Moreover, by ex.V.1.2, $H^2 = d$. Thus $K_X^2 = (d-4)^2 \cdot H^2 = d \cdot (d-4)^2$.

(b) Note that by Ex. II.8.3, $K_{C \times C'} = pr_C^* K_C + pr_{C'}^* K_{C'}$ and thus:

$$K_{C \times C'}^2 = (pr_C^* K_C)^2 + (pr_{C'}^* K_{C'})^2 + 2 \cdot (pr_C^* K_C) \cdot (pr_{C'}^* K_{C'}).$$

Lemma If X_1, X_2 are irreducible smooth curves then:

- $pr_1^* D_1 \cdot pr_1^* D_2 = 0$ for any $D_1, D_2 \in Div(X_1)$,
- $pr_1^* D_1 \cdot pr_2^* D_2 = \deg D_1 \cdot \deg D_2$ for any $D_1 \in Div(X_1)$, $D_2 \in Div(X_2)$.

Proof: ad. (1) WLOG we can assume that (by replacing D_1, D_2 by linearly equivalent divisors) $supp(D_1) \cap supp(D_2) = \varnothing$. Then $pr_1^* D_1 \cap pr_1^* D_2 = \varnothing$ and thus their intersection product is zero.
ad. (2) WLOG we can assume that $D_1 = (P_1)$, $D_2 = (P_2)$. Then $pr_1^* D_1 = \{P_1\} \times X_2$ and $pr_1^* D_2 = X_1 \times \{P_2\}$ – these curves intersect transversally (the tangent space at any point of $X_1 \times X_2$ is a direct sum of tangent spaces of X_i's) and moreover, their intersection is $\{P_1\} \times \{P_2\}$. Thus $pr_1^* D_1 \cdot pr_2^* D_2 = 1$.

The proof follows by the Lemma and the fact that $\deg K_C = 2(g_C - 1)$.

5.1.6 (a) We repeat the argument from Example V.4.1. We have:

$$\Delta^2 = \deg_\Delta(\mathcal{L}(\Delta) \otimes \mathcal{O}_\Delta).$$

But $\Omega_{X/k}$ is by definition

$$(\mathcal{L}(-\Delta)/\mathcal{L}(-\Delta)^2)|_\Delta = \mathcal{L}(-\Delta)\otimes\mathcal{O}_{C\times C}/\mathcal{L}(-\Delta) = \mathcal{L}(-\Delta)\otimes\mathcal{O}_\Delta = (\mathcal{L}(\Delta)\otimes\mathcal{O}_\Delta)^{-1}$$

and thus:

$$\deg_\Delta((\mathcal{L}(\Delta)/\mathcal{L}(\Delta)^2)|_\Delta) = -\deg K_X = 2-2g.$$

This ends the proof.

(b) We'll prove that the "intersection matrix" on (l, m, Δ) is given by:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2-2g \end{pmatrix}$$

which is non-singular for $g > 0$. This will prove the desired independence.

- firstly note that $\{P_1\}\times C' \equiv \{P_2\}\times C'$ for any $P_i \in C$. Indeed, these divisors are algebraically equivalent, as the are "endpoints" of the family of divisors $D_P := \{P\}\times C'$, $P\in C$ ($T = C$ in the notation of ex. 1.7).
  Therefore $l^2 = (\{P_1\}\times C').(\{P_2\}\times C') = 0$ and analogously $m^2 = 0$.
- $l.m = 1$, as $l\cap m = 1$ and they meet transversally. Indeed, let $l = \{P\}\times C'$, $m = \{Q\}\times C'$. Let t_P, t_Q be the uniformizers and $t_1 = pr_1^* t_P$, $t_2 = pr_2^* t_Q$. Then $\mathfrak{m}_{C\times C',(P,Q)} = (t_1, t_2)$ and local equations of l, m are t_1, t_2. This proves the transversality.
- $l.\Delta = m.\Delta = 1$. Again, it suffices to prove transversality. But the local equation of Δ is $t_1 - t_2$ and

$$(t_1, t_1 - t_2) = (t_1, t_2).$$

5.1.7 (a) It suffices to show that if $D_0 \sim_{prealg} D_1$, $E_0 \sim_{prealg} E_1$ then $D_0 + E_0 \sim_{alg} D_1 + E_1$. Suppose that $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$ are algebraic "families of divisors" on $X\times T_1$, $X\times T_2$ and $\mathbb{D}_{P_i} = D_i$, $\mathbb{E}_{Q_i} = E_i$. Consider the "family of divisors" on $X\times T_1$: $\mathbb{D} + pr_1^* E_0$. One has $(\mathbb{D} + pr_1^*E_0)|_{P_0} = D_0 + E_0$, $(\mathbb{D} + pr_1^*E_0)|_{P_1} = D_1 + E_0$ and thus $D_0 + E_0 \sim_{prealg} D_1 + E_0$. Analogously, $D_1 + E_0 \sim_{prealg} D_1 + E_1$. Therefore $D_0 + E_0 \sim_{alg} D_1 + E_1$.

(b) Let $D = div(f)$. Then $\mathbb{D} := div(tf - u)$ on $X\times\mathbb{P}^1$ satisfies: $\mathbb{D}|_{[1:0]} = D$, $\mathbb{D}|_{[0:1]} = 0$.

(c) Let $\mathbb{D}$ be a Cartier divisor on $X\times T$, $\mathbb{D}_{P_0} = D$, $\mathbb{D}_{P_1} = D'$. Note that any divisor may be presented as a difference of two very ample divisors (cf. beginning of the proof of Theorem V.1.1). Thus it suffices to show that $D.H \equiv D'.H$ for a very ample divisor H. But this follows by Theorem III.9.9 – as the family $\mathbb{D}$ is flat, the Hilbert polynomial $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{D}_P}(n))$ (where $\mathcal{O}(1) := H$) does not depend on P. Thus also the degree of the projective embedding of $\mathbb{D}_P$ associated to H does not depend on P. But this degree is given by $\mathbb{D}_P.H$ – this ends the proof.

5.1.8 (a) We can assume that C, D are effective and that they meet transversally ("Chow moving lemma" – cf. Lemma V.1.2. and the fact that any divisor is a difference of effective divisors). Consider the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc} Pic(X) & \xrightarrow{c_X} & H^1(X,\Omega_{X/k}) & \xrightarrow{\cong} & H^1(X,\Omega_{X/k})^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Pic(D) & \xrightarrow{c_D} & H^1(D,\Omega_{D/k}) & \xrightarrow{\cong} & H^0(D,\mathcal{O}_D)^* \cong k \end{array}$$

where:

- $Pic(X) \to Pic(D)$ is given by $[C] \mapsto \sum_{P\in C\cap D}(P)$ for any C in equivalence class of an effective divisor $[C]$, which meets D transversally (sometimes one denotes this map by $C\cdot D$). Equivalently, this is the map induced by $D \hookrightarrow X$ on cohomology groups: $H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^1(D,\mathcal{O}_D^*)$
- $H^1(X,\Omega_X) \to H^1(X,\Omega_X)^*$ is given by Serre duality: $\xi \mapsto \langle\xi, -\rangle$.
- $H^1(D,\Omega_D) \to H^0(D,\mathcal{O}_D)^* \cong k$ is given as above.
- $H^1(X,\Omega_X)^* \to H^0(D,\mathcal{O}_D)^* \cong k$ is given by evaluation of functional on $c_X(D)$.

We'll show it is commutative. The left square is commutative by functoriality, the right square by ex. III.7.4(d). Thus the following maps are the same:

$$E \mapsto c_X(E) \mapsto \langle c_X(E), -\rangle \mapsto \langle c_X(E), c_X(D)\rangle$$

$$E \mapsto D \cdot E \mapsto c_D(D \cdot E) \mapsto \langle c_D(D \cdot E), -\rangle \mapsto \text{ (by Ex. III.7.4 (a)) } \mapsto \deg(D \cdot E) = D.E.$$

This ends the proof.

(a) Extend the homomorphism $c : Pic(X) \to H^1(X, \Omega_{X/k})$ to $c_k : Pic(X)_k \to H^1(X, \Omega_{X/k})$, where $Pic(X)_k := Pic(X) \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Using the following lemma:

Lemma 1 ([Riou, REALIZATIONS FUNCTORS, Proposition 2.12., Lemma 2.13]) If G is an abelian group with a non-degenerate bilinear pairing

$$G \times G \to \mathbb{Z}, \qquad (x, y) \mapsto x.y$$

then for any field k of characteristic 0 the extension of this pairing to

$$G_k \times G_k \to k$$

(where $G_k := G \otimes_{\mathbb{Z}} k$) is also non-degenerate.
Proof: The existence of pairing easily implies that G is torsion-free. For $k = \mathbb{Q}$ this is obvious. Indeed, if $x \in G_{\mathbb{Q}}$ and $F_x = 0$ (where $F_x(y) = x.y$) then for some $N \in \mathbb{N}$, $Nx \in G$ and $F_{Nx} = 0$ which implies that $Nx = 0$ and $x = 0$.
Now, if k is arbitrary, this follows by the following fact:

Fact If V, W are $\mathbb{Q}$-vector spaces and $f : V \to W$ is injective then $f \otimes k : V \otimes k \to W \otimes k$ is injective for any field k of characteristic 0.
Pf. If $\dim V < \infty$ then the proof is straightforward (rank of a linear operator may be computed as rank of highest non-vanishing minor of its matrix, which doesn't depend on the field of definition). For general V, one can note that it is an inductive limit of its finitely dimensional subspaces and use the first paragraph of the proof.

applied for $V = G_{\mathbb{Q}}$, $W = V^*$ $f(x) := F_x$.

one sees that $\ker c_k \subset Pic^n(X)_k := Pic^n(X) \otimes k$ ($Pic^n(X)$ – cycles numerically equivalent to zero). Indeed, if $x \in \ker c_k$ then for any $y \in Pic(X)_k$ we have:

$$x.y = \langle c_k(x), c_k(y)\rangle = 0$$

(where $x.y$ is the k-linear extension of intersection pairing to $Pic(X)_k$). But by Lemma 1, the intersection pairing is non-degenerate on $\frac{Pic(X)}{Pic^n(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} k = \frac{Pic(X)_k}{Pic^n(X)_k}$ and thus $x \in Pic^n(X)_k$. Note that $Pic(X)_k / \ker c_k \hookrightarrow H^1(X, \Omega_{X/k})$. Since $H^1(X, \Omega_{X/k})$ is a finite dimensional k-vector space, $Pic(X)_k / \ker c_k$ is as well. But $Pic(X)_k / \ker c_k \twoheadrightarrow Pic(X)_k / Pic^n(X)_k$ and thus $\frac{Pic(X)}{Pic^n(X)} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ is finitely dimensional k-vector space. The proof follows from the below lemma.

Lemma 2 If G is a torsion-free abelian group and $G \otimes_{\mathbb{Z}} k$ is a finitely dimensional k-vector space for a field k of characteristic 0 then G is finitely generated.

5.1.9 (a) Consider the divisor $E := (H.H) \cdot D - (D.H) \cdot H$. Note that

$$H.E = (H.H) \cdot H.D - (D.H) \cdot H.H = 0$$

and thus by Hodge index theorem $E \equiv 0$ or $E^2 < 0$. In both cases:

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant E.E = (H.H)^2 \cdot D.D + (D.H)^2 \cdot H.H - 2(H.H) \cdot (D.H) \cdot D.H \\ &= (H^2)^2 \cdot D^2 - H^2 \cdot (D.H)^2. \end{aligned}$$

But since $H.H$ is positive (its multiple is degree of X by some embedding, cf. ex. 2), we may divide by it to obtain:

$$0 \geqslant H^2 \cdot D^2 - (D.H)^2,$$

which ends the proof.

(b) Note firstly that $l+m$ is ample. Indeed, let $l = \{P\} \times C'$, $m = C \times \{Q\}$. Note that P is ample (any effective divisor on a curve is ample). Thus there exists s such that sP is very ample, i.e. the associated morphism $\varphi_{sP} : C \to \mathbb{P}^S$ is an embedding. Analogously, for some t, T we have an embedding $\varphi_{tQ} : C' \to \mathbb{P}^T$. Without loss of generality, we may assume that $s = t$ (by replacing s, t by st). Then $\varphi_{sP} \times \varphi_{tP} : C \times C' \to \mathbb{P}^S \times \mathbb{P}^T$ is an embedding and the associated very ample divisor is $s(l+m)$. Thus $l+m$ is ample.

????

5.1.10 • Proof of $\Gamma^2 = q(2-2g)$:

Let $\mathcal{J}$, $\mathcal{I}$ be the ideal sheaves of Γ and Δ in $C \times C$. Denote also $\tilde{f} := id \times f$. Note that

$$\mathcal{J} = \{g \in \mathcal{O}_{C\times C} : g(P, f(P)) = 0\} = \tilde{f}^*\{g \in \mathcal{O}_{C\times C} : g(P, f(P)) = 0\} = \tilde{f}^*\mathcal{I}.$$

This shows easily that

$$\mathcal{N}^*_{\Gamma, C\times C} = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2|_\Gamma = \tilde{f}^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2|_\Delta) = \tilde{f}^*\mathcal{N}_{\Delta, C\times C}.$$

Thus:

$$\Gamma^2 = -\deg_\Gamma \mathcal{N}^*_{\Gamma, C\times C} = -\deg_\Gamma(\tilde{f}^*\mathcal{N}^*_{\Delta, C\times C}) = \deg\tilde{f} \cdot \deg_\Delta(\tilde{f}^*\mathcal{N}_{\Delta, C\times C}) = q \cdot \Delta^2 = q\cdot(2-2g).$$

• Proof of $\Gamma.\Delta = N$: note that $N = \#(\Gamma \cap \Delta)$ and thus it suffices to prove that they meet transversally. Choose any $(P,P) \in \Gamma \cap \Delta$ and let $t \in \mathbb{F}_q(C)$ be any uniformizer at P (we can choose its coordinates to be in $\mathbb{F}_q$, since P is in $\mathbb{F}_q$). Then one easily sees that the local equations of Δ and Γ at (P,P) are respectively $t_1 - t_2 = 0$ and $0 = t_2 - f \circ t_1 = t_2 - t_1^q$, where $t_i = pr_i^* t (= t \circ pr_i)$. But $\mathfrak{m}_{C\times C,(P,P)} = (t_1, t_2)$ and

$$(t_1 - t_2, t_2 - t_1^q) = (t_1 - t_2, t_1^q - t_1) = (t_1 - t_2, t_1 \cdot (t_1^{q-1} - 1)) = (t_1 - t_2, t_1) = (t_1, t_2).$$

(since $(t_1^{q-1} - 1)$ is a unit in $\mathcal{O}_{C\times C,(P,P)}$). This proves the transversality.

• Proof of $\Delta.m = \Delta.l = 1$: as in Ex. 1.6 (b).

• Proof of $l.\Gamma = 1$:

Again, it suffices to prove transversality. But, if $l = P \times C$ then local equations at P of l and Γ are t_1, $t_2 - t_1^q$ (defined as above). But $(t_1, t_2 - t_1^q) = (t_1, t_2)$.

• Proof of $m.\Gamma = q$:

Let $m = C \times P$. We can without loss of generality assume that $P \in C(\mathbb{F}_q)$. Equations of m and Γ at P are t_2 and $t_2 - t_1^q$. Moreover:

$$(t_2, t_2 - t_1^q) = (t_1^q, t_2).$$

Thus

$$(m.\Gamma) = (m.\Gamma)_{(P,P)} = length_k(\mathcal{O}_{(P,P)}/(t_1^q, t_2)) = length_k(\widehat{\mathcal{O}_{(P,P)}}/(t_1^q, t_2)) = length_k(k[[t_1, t_2]]/(t_1^q, t_2)) = q.$$

• Proof of the inequality:

Let $D = r\Gamma + s\Delta$. Then D is of type $(a,b) = (r+s, q\cdot r + s)$. By the inequality of ex. 1.9 (b) $D^2 \leqslant 2ab$. Now,

$$D^2 = r^2 \cdot q(2-2g) + s^2(2-2g) + 2rsN.$$

Write $a := (1+q) - N$. Then by the previous inequality:

$$\begin{aligned} r^2 \cdot q(2-2g) + s^2(2-2g) + 2rs(1+q-a) &\leqslant 2\cdot(r+s)\cdot(q\cdot r+s) \\ rs\cdot a &\geqslant -gq\cdot r^2 - gs^2 \\ |a| &\leqslant g\cdot(q\cdot\frac{r}{s} + \frac{s}{r}). \end{aligned}$$

Now to minimize the expression $q\cdot\frac{r}{s} + \frac{s}{r}$ we take $r_n, s_n \in \mathbb{Z}$ such that $\lim_n \frac{s_n}{r_n} = \sqrt{q}$ (it follows from AM-GM inequality that this is the lowest value). We obtain the desired inequality $|a| \leqslant 2g\sqrt{q}$.

5.1.11 (a) Let the classes of $P_1, \dots, P_n, H$ generate $Num(X) \otimes \mathbb{Q}$, where $Span_{\mathbb{Q}}([H]_{num})^{\perp} = Span_{\mathbb{Q}}([P_1]_{num}, \dots [P_n]_{num})$. Let D be an effective divisor and suppose that $D.H = d$. Then

$$D \equiv \sum_i a_i D_i + bH$$

for $a_i \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$ (where one can take N equal to the index of $Span_{\mathbb{Z}}([P_1]_{num}, \dots [P_n]_{num})$ in $Num(X)$). Let also $D = \sum_i e_i \Gamma_i$, where Γ_i are irreducible curves and $e_i \geqslant 0$. Then $D.H = d$ implies that:

$$d = \sum_i e_i \cdot \Gamma_i.H \geqslant \sum_i e_i,$$

since $\Gamma_i.H \geqslant 1$ (cf. ex. V.1.2). One the other hand, $D.H = d$ implies:

$$d = \sum_i a_i D_i.H + bH.H = 0 + bH.H$$

and thus $b = \frac{d}{H.H}$.
Consider now D^2; we'll compute it in two different ways. One one hand:

$$D^2 = (\sum_i a_i D_i + bH)^2 = f(a_1, \dots, a_n) + b^2 H^2,$$

where

$$f(a_1, \dots, a_n) := (\sum_i a_i D_i)^2 = \sum_i a_i^2 D_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j D_i.D_j$$

is a quadratic form, which is negative definite by Hodge index theorem.
Note that $\Gamma_i^2 + \Gamma_i.K = p_a(\Gamma_i) - 2 \geqslant -2$. Thus:

$$\begin{aligned} D^2 &= (\sum_i e_i \cdot \Gamma_i)^2 = \sum_i e_i^2 \Gamma_i^2 + 2 \sum_{i<j} e_i e_j \Gamma_i.\Gamma_j \\ &\geqslant \sum_i e_i^2 \Gamma_i^2 \geqslant \sum_i e_i \Gamma_i^2 \geqslant \sum_i e_i \cdot (-\Gamma_i.K - 2) \\ &= -D.K - 2\sum_i e_i \geqslant -D.K - 2d = -(\sum_i a_i D_i + bH).K - 2d = l(a_1, \dots, a_n) + \text{constant}, \end{aligned}$$

where $l(a_1, \dots, a_n) := -\sum_i a_i D_i.K$ is a linear form.
We obtain an inequality:

$$f(a_1, \dots, a_n) \geqslant l(a_1, \dots, a_n) + \text{constant},$$

which can be satisfied only for finitely many $a_i \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$, since f is negative definite.

(b) Recall that $H = l + m$ is ample.

Lemma Let $l = \{P\} \times C$, $m = C \times \{Q\} \subset C \times C$. If $\Gamma_f \subset C \times C$ is a graph of a morphism $f : C \to C$ of degree d then $\Gamma_f.l = 1$, $\Gamma_f.m = d$.
Proof: note that the local equations of Γ_f, l, m in a point (P, Q) (where $f(P) = Q$) are $t_2 - f^*t_1$, t_1, t_2, where t_P, t_Q are uniformizers at P and Q, $t_1 = pr_1^* t_P$, $t_2 = pr_2^* t_Q$. Let $f^* t_Q = t_P^{e_P} \cdot u$, where e_P is the ramification index and $u \in \mathcal{O}_P^*$. Then:

- $(\Gamma_f.l)_P = length\, \mathcal{O}_{(P,Q)}/(t_2 - f^*t_1, t_1) = length\, \mathcal{O}_{(P,Q)}/(t_2, t_1) = 1$,
- $(\Gamma_f.l)_P = length\, \mathcal{O}_{(P,Q)}/(t_2 - f^*t_1, t_2) = length\, \mathcal{O}_{(P,Q)}/(t_2 - t_1^{e_P} \cdot u_1, t_2) = length\, \mathcal{O}_{(P,Q)}/(t_1^{e_P}, t_2) = e_P$,

and the proof follows by noting that $\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P = \deg f$.

The lemma implies that $\Gamma_f.H = 2$ for any $f \in Aut(C)$. Thus, by (a), the subset $\{[\Gamma_f] : f \in Aut(C)\}$ of $Num(X)$ is finite. Let $\widetilde{f} := id \times f$. Note that $\Gamma_f = \widetilde{f}_* \Delta$. By properties of numerical equivalence, if $\Gamma_f \equiv \Gamma_g$ then (after aplying $(f^{-1})_*$) $\Delta \equiv \Gamma_h$ for $h = g^{-1} \circ f$. Therefore $\Gamma_g.\Delta = \Delta^2 = 2 - 2g < 0$. Therefore the irreducible curves Γ_h and Δ must be equal. This easily implies that $h = id$ (since h is equal to the composition $C \to \Gamma_h$ and projection onto second factor).

5.1.12 The first part is trivial by Nakai-Moishezon Criterion.
The second part (stolen from Piye Yang):

Lemma A divisor D of degree $2g$ on a non-singular curve C of genus $g > 2$ is very ample iff it is not of the form $K_X + P + Q$ for some $P, Q \in C$.
Proof: By Proposition IV.3.1. D is very ample iff for any P, Q:

$$\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2.$$

This is equivalent by Riemann-Roch to $l(K_X + P + Q - D) = 0$, i.e. (since $\deg(K_X + P + Q - D) = 0$) $K_X + P + Q - D \neq 0$. This ends the proof.

Let $X = C \times \mathbb{P}^1$ for a curve C of genus $g > 2$. Let D_1, D_2 be two divisors of degree $2g$ on C such that D_1 is very ample and D_2 isn't. However, $D_1 \times \mathbb{P}^1 \equiv D_2 \times \mathbb{P}^1$ (read solution of 5.1.6 (b), first bullet).

Subsection 5.2

5.2.2 (we assume that C is non-singular)
Note that every section σ_i corresponds to a surjective morphism $\alpha_i : \mathcal{E} \to \mathcal{L}_i$ and vice versa.
We want to show that $\sigma_1(C)$ and $\sigma_2(C)$ are disjoint iff $\alpha_1 \oplus \alpha_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ is an isomorphism. Note that (since σ_i are sections of $\pi : X \to C$), it suffices to show that for any $P \in C$:

$$\sigma_1(P) \neq \sigma_2(P) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{1,P} \oplus \alpha_{2,P} : \mathcal{E}_P \to \mathcal{L}_{1,P} \oplus \mathcal{L}_{2,P} \quad \text{is an isomorphism.}$$

This might be done locally. Fix a point $P \in C$. Let $P \in U$, $\mathcal{E}|_U \cong \mathcal{O}_U^2$ and let $\alpha_i : \mathcal{E} \to \mathcal{L}_i$ be given by sections $a_i, b_i \in \Gamma(U, \mathcal{L}_i)$ that generate $\mathcal{L}_i$ over U. WLOG $b_i(Q) \neq 0$ for $Q \in U$. Let also $\widetilde{a}_i := a_i/b_i \in \mathcal{O}_U$. Then the section σ_i is given by $Q \mapsto (Q, [\widetilde{a}_i(Q) : 1]) \in U \times \mathbb{P}^1 \cong \pi^{-1}(U)$. Observe also that the map $\alpha_i : \mathcal{O}_P^2 \to \mathcal{L}_{i,P}$ is given by $(x, y) \mapsto xa_i + yb_i$. Therefore, $\alpha_{1,P} \oplus \alpha_{2,P} : \mathcal{O}_P^2 \to \mathcal{L}_{1,P} \oplus \mathcal{L}_{2,P}$ is given by:

$$(x, y) \mapsto x(a_1, a_2) + y(b_1, b_2). \qquad (*)$$

- if $\sigma_1(P) \neq \sigma_2(P)$, then $\widetilde{a}_1(P) \not\equiv \widetilde{a}_2(P) \pmod{\mathfrak{m}_P}$. This is clearly equivalent to

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$$

  Thus the map $(*)$ is surjective $\pmod{\mathfrak{m}_P}$ and by Nakayama's lemma it is surjective. But since C is non-singular, $\mathcal{O}_P$ is a PID and thus $\ker \alpha_{1,P} \oplus \alpha_{2,P}$ is free as a submodule of a free module. But it must be free module of rank 0, i.e. $\alpha_{1,P} \oplus \alpha_{2,P}$ is an isomorphism!
- If $\alpha_{1,P} \oplus \alpha_{2,P}$ is an isomorphism, then the map $(*)$ is surjective $\pmod{\mathfrak{m}_P}$, which easily leads to

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$$

  and $\widetilde{a}_1(P) \not\equiv \widetilde{a}_2(P) \pmod{\mathfrak{m}_P}$, which is equivalent to $\sigma_1(P) \neq \sigma_2(P)$.

5.2.3 (a) Note that for n large enough, $\mathcal{E}(n)$ is globally generated. Thus by exercise II.8.3, there exists an exact sequence of the form:

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{E}(n) \to \mathcal{E}' \to 0,$$

where $\mathcal{E}'$ is a locally free sheaf of rank $rank(\mathcal{E}) - 1$. Thus

$$0 \to \mathcal{O}_C(-n) \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'(-n) \to 0.$$

The proof follows by repeating the above procedure for $\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}'(-n)$.

(b) Recall that every invertible sheaf on $\mathbb{P}^2$ is of the form $\mathcal{O}(n)$. Suppose to the contrary that $0 \to \mathcal{O}(n_1) \to \Omega_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}(n_2) \to 0$. By taking the long exact sequence sequence of cohomology we see that $H^1(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}) = 0$, since $H^i(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) = 0$ for $i \neq 0, 2$ (Theorem III.5.1.). On the other hand, by taking the long exact sequence of cohomology for Euler sequence

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \to \mathcal{O} \to 0$$

we obtain $H^1(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}) \cong H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}) = k$. The contradiction ends the proof.

5.2.4 Note that $\mathfrak{e} = 0$, $e = 0$. Suppose that D corresponds to $\mathcal{E} \to \mathcal{L}(\mathfrak{d}) \to 0$. By Proposition V.2.9., $D \sim C_0 + \mathfrak{d}f$. Thus:

$$D^2 = C_0^2 + (\mathfrak{d}f)^2 + 2C_0.\mathfrak{d} = -e + 0 + 2C_0.\mathfrak{d}f = 0 + 2C_0.\mathfrak{d}f = 2\deg\mathfrak{d}$$

(since $C_0.f = 1$) which shows that $D^2 = 2r$ for $r = \deg\mathfrak{d}$.

(a) We have to show that there exists $\mathfrak{d} \in Pic(C)$, $\deg\mathfrak{d} = r$ such that there exists a surjection $\mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C(\mathfrak{d})$. For $r = 0$ it is obvious. Suppose that $r \geqslant g + 1$. By ex. IV.6.8, there exists a non-special divisor $\mathfrak{d}$ of degree r such that $|\mathfrak{d}|$ has no base points. Choose any $D_1 \in |\mathfrak{d}|$. Then we obtain a natural morphism:

$$\alpha_1 : \mathcal{O} \subset \mathcal{O}(D_1) \cong \mathcal{O}(\mathfrak{d}).$$

which is an isomorphism on $C \backslash supp(D_1)$. Since $|\mathfrak{d}|$ has no base points, we may choose another divisor $D_2 \in |\mathfrak{d}|$ such that $supp(D_1) \cap supp(D_2) = \varnothing$. Again, Then we obtain a natural morphism:

$$\alpha_2 : \mathcal{O} \subset \mathcal{O}(D_2) \cong \mathcal{O}(\mathfrak{d}).$$

which is an isomorphism on $C \backslash supp(D_2)$. This implies easily that $\alpha_1 \oplus \alpha_2 : \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}(\mathfrak{d})$ is a surjection.

(b) ???

5.2.5 (a) Choose any divisor D with $\deg D = -e$ such that $-D \leqslant K$ (this is possible, since $\deg(-D) = e \leqslant \deg K = 2g - 2$). Then $H^1(\mathcal{L}(-D)) \cong H^0(\mathcal{L}(K + D))^* \neq 0$ (since $1 \in H^0(\mathcal{L}(K + D))$). Choose any $0 \neq \xi \in H^1(\mathcal{L}(-D)) \cong Ext(\mathcal{L}(D), \mathcal{O}_C)$ and let

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathcal{L}(D) \to 0$$

be the corresponding extension. Note that $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$ (since it contains $H^0(\mathcal{O}_C)$) and $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0$ for any $\deg L < 0$ (this follows by tensoring the above exact sequence by $\mathcal{L}$, taking the long exact sequence of cohomology and noting that $\Gamma(\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}) = 0$). Thus $\mathcal{E}$ is normalized and indecomposable.

(b) Clearly, $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$. One easily checks that it suffices to check the "normalization condition" on the sheaves of the form $\mathcal{L}(-F)$, where F is of degree 1. By tensoring the exact sequence by $\mathcal{L}(-F)$ and taking the long exact sequence of cohomology, we see that $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}(-F)) \neq 0$ if and only if the map

$$H^0(\mathcal{L}(D - F)) \to H^1(\mathcal{L}(-F)) \cong H^0(\mathcal{L}(K + F))^* \qquad (*)$$

is not injective. Suppose that

$$s \in H^0(\mathcal{L}(D - F)) = \{s \in K_X : div(s) \geqslant F - D\}.$$

Let $E := div(s) + D - F$ – note that $E \in |D - F|$ and $\deg E = d - 1$. We obtain the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(\mathcal{O}_C) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{L}(-D))^* & \xrightarrow{\cong} & H^0(\mathcal{L}(D + K))^* \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(\mathcal{L}(E)) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{L}(E - D)) & \xrightarrow{\cong} & H^0(\mathcal{L}(K + D - E))^* \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
H^0(\mathcal{L}(D - F)) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{L}(-F)) & \xrightarrow{\cong} & H^0(\mathcal{L}(K + F))^*
\end{array}$$

The maps are given by:

- $H^0(\mathcal{O}_C) \to H^0(\mathcal{L}(-D))^*$ is given by $1 \mapsto \xi$,
- $H^0(\mathcal{O}_C) \to H^0(\mathcal{L}(D - F))$ is given by $1 \mapsto s$,
- $H^0(\mathcal{L}(K + D))^* \to H^0(\mathcal{L}(K + D - E))^*$ is given by restriction of a functional to the subspace,
- $H^0(\mathcal{L}(K + D - E))^* \to H^0(\mathcal{L}(K + F))^*$ is given by $\Phi(x) \mapsto \Phi(s \cdot x)$

This easily implies that s belongs to the kernel of $(*)$ iff $\xi(s \cdot x)$ restricted to the subspace $H^0(\mathcal{L}(K + F))$ is zero, or in other words iff ξ restricted to $H^0(\mathcal{L}(K + D - E))$ is zero, or in other words iff ξ restricted to $|K + D - E| + E$ is zero. This easily concludes the proof.

(c) Let $d := -e$ and fix any D of degree d. Denote $V := H^0(\mathcal{L}(K+D))$, $L_E := H^0(\mathcal{L}(K+D-E))$. For $d=1$ the proof is immediate, thus we assume $d=0$. Note that by Riemann-Roch theorem, $\dim V = g-1+d$ and for any effective E of degree $d-1$, $\dim L_E = g$. Let X_{d-1} denote the space of effective divisors on C of degree $d-1$ – note that if may be identified with C^{d-1}/S_{d-1} and thus has dimension $d-1$. Let also:

$$B := \{(E, W) \in X_{d-1} \times Gr(V, \dim V - 1) : L_E \subset W\}.$$

Let $\pi_1 : B \to X_{d-1}$, $\pi_2 : B \to X_{d-1}$. Note that for any $E \in X_{d-1}$, $\dim \pi_1^{-1}(E) = \dim V - 1 - g$. Indeed, for a fixed subspace L of dimension g, the hypersurfaces W containing L are in bijection with hypersurfaces of V/L. But $\dim Gr(V/L, \dim(V/L)-1) = \dim(V/L) - 1 = \dim V - 1 - g$. By the above considerations,

$$\dim B = \dim X_{d-1} + \dim \pi_1^{-1}(E) = (d-1) + (\dim V - 1 - g) = 2d - 3.$$

Thus

$$\dim Gr(V, \dim V - 1) - \dim B = (g - 2 + d) - (2d - 3) = g + 1 - d > 0$$

and π_2 is not surjective. Choose any $W \notin im\,\pi_2$ and any $\xi \in V^*$ such that $\ker \xi = W$. Then by (2), any $\mathcal{E}$ corresponding to $\xi \in V^* \cong Ext^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}(D))$ is normalized.

5.2.7 Let $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, where

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathcal{L}(P) \to 0. \qquad (*)$$

(so that $\mathfrak{e} = P$). Let D be a section of $\mathcal{E}$ coming from $\mathcal{E} \to \mathcal{L}(\mathfrak{d}) \to 0$, satisfying $D^2 = 1$. Then, by lemma ???:

$$D^2 = C_0^2 + ((\mathfrak{d} - \mathfrak{e})f)^2 + 2C_0.(\mathfrak{d} - \mathfrak{e})f = 1 + 0 + 2\deg(\mathfrak{d} - \mathfrak{e}),$$

which easily implies that $\deg \mathfrak{d} = 1$. But any divisor of degree 1 on an elliptic curve is linearly equivalent to a point: $\mathfrak{d} \sim (Q)$.

We will show now that any point Q provides a section D with $D^2 = 1$. Take the dual of the exact sequence $(*)$ and tensor it with $\mathcal{L}(Q)$ to obtain:

$$0 \to \mathcal{L}(Q - P) \to \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{L}(Q) \to \mathcal{L}(Q) \to 0.$$

Now take the long exact sequence and use Riemann-Roch to obtain:

$$0 \to 0 \to Hom(\mathcal{E}, \mathcal{L}(Q)) \to \Gamma(\mathcal{L}(Q)) = k \to 0$$

Thus, to $1 \in \mathcal{L}(Q)$, there corresponds a morphism $f : \mathcal{E} \to \mathcal{L}(Q)$.

This morphism is surjective, since 1 do not vanish on any point $R \in C$. Thus Q One easily sees that ????

5.2.11 (The proof is modeled on the proof of Theorem 2.17. and [Garcia, Perez, The Projective Theory of Ruled Surfaces])

(We will assume that k is infinite)

(a) **First part of the problem:** we will show that if $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{e}$ are effective divisors with no common base points and $\mathfrak{b}$ is nonspecial, then there exists a section $D \sim C_0 + \mathfrak{b} f$.

Solution: Let $\mathfrak{d} := \mathfrak{b} + \mathfrak{e}$. Consider the sequence

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}(\mathfrak{e}) \to 0 \qquad (\dagger)$$

and apply to it the functor $Hom_{\mathcal{O}_C}(-, \mathcal{O}(\mathfrak{d})) = \Gamma(C, (-)^* \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{d}))$. Thus we obtain:

$$0 \to \Gamma(C, \mathcal{O}(\mathfrak{d} - \mathfrak{e})) \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}(\mathfrak{d})) \to \Gamma(C, \mathcal{O}(\mathfrak{d})) \to H^1(C, \mathcal{O}(\mathfrak{d} - \mathfrak{e})) = 0 \qquad (*)$$

(the last equality follows from the fact that $\mathfrak{b}$ is non-special).

We will show that to give a surjection $f : \mathcal{E} \to \mathcal{O}(\mathfrak{d})$ it *basically* suffices to give:

- two divisors $\mathfrak{d}_1 \in |\mathfrak{d}|$, $\mathfrak{d}_2 \in |\mathfrak{d} - \mathfrak{e}|$ such that $Supp(\mathfrak{d}_1) \cap Supp(\mathfrak{d}_2) = \varnothing$,

  (note that $|\mathfrak{d}|, |\mathfrak{d} - \mathfrak{e}|$ have no base points in common, so we can choose such $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$)
- an element $\lambda \in k^*$ (finitely many choices of λ will be wrong).

Indeed, choose $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ and λ as above. Let $f_1 : \mathcal{O} \to \mathcal{O}(\mathfrak{d})$ be given by $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}(\mathfrak{d}_1) \cong \mathcal{O}(\mathfrak{d})$. Note that f_1 is an isomorphism outside of $Supp(\mathfrak{d}_1)$ and for $P \in Supp(\mathfrak{d}_1)$, $f_{1,P} : \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}(\mathfrak{d})_P$ is a multiplication by $t_P^{n_P}$ (where $\mathfrak{d}_1 = \sum_Q n_Q(Q)$ and t_Q is the uniformizer at Q). Analogously for $\mathfrak{d}_2$ we construct $f_2 : \mathcal{O}(\mathfrak{e}) \to \mathcal{O}(\mathfrak{d})$ which is an isomorphism outside of $Supp(\mathfrak{d}_2)$.

Let now $\widetilde{f_1} : \mathcal{E} \to \mathcal{O}(\mathfrak{d})$ be any lift of f_1 (chich exists by (*)) and let $\widetilde{f_2} := f_2 \circ p : \mathcal{E} \to O(\mathfrak{d})$, where $p : \mathcal{E} \to \mathcal{O}(\mathfrak{e})$. Finally, we put:

$$f := \widetilde{f_1} + \lambda \cdot \widetilde{f_2} : \mathcal{E} \to \mathcal{O}(\mathfrak{d}).$$

Note that $f|_{\mathcal{O}} = \widetilde{f_1}|_{\mathcal{O}} = f_1|_{\mathcal{O}}$ – thus f is a surjection outside of $Supp(\mathfrak{d}_1)$. Moreover, $\widetilde{f_2}$ is a surjection outside of $Supp(\mathfrak{d}_2)$ (as a composition of two surjections). Thus, in order to show that for $P \in Supp(\mathfrak{d}_1)$ and suitable λ, $f_P : \mathcal{E}_P \to \mathcal{O}(\mathfrak{d})_P$ is a surjection, it suffices to show the following lemma:

Lemma: Let A be a local ring which is a k-algebra with residue field k, and let M, N be free A-modules of finite ranks. Suppose that $f_i : M \to N$ $(i = 1, 2)$ are A-linear and f_2 is surjective. Then $f_1 + \lambda \cdot f_2$ is surjective for all $\lambda \in k^*$, excluding finitely many values.

Proof: An A-linear map $f : M \to N$ is surjective iff:

- $rank_A(M) > rank_A(N)$,
- the matrix of f has an invertible minor of maximal dimension.

Thus the matrix of f_2 must have a submatrix A_2 of maximal dimension with invertible determinant. Let A_1 be the corresponding submatrix of matrix of f_1. Then it suffices to exclude the solutions $\lambda \in k^*$ of the equation:

$$\det(A_2^{-1}A_1 + \lambda I) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}_A}.$$

Second part of the problem: if $|\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{b} + \mathfrak{e}|$ are base point free then $|D|$ also:

Solution I: (we assume that k is infinite)

Let $P \in X$. If $P \notin C_0$ then we can choose $\mathfrak{b}_1 \in |\mathfrak{b}|$ such that $\pi(P) \notin Supp(\mathfrak{b}_1)$, since $|\mathfrak{b}|$ is base point free. Then $P \notin Supp(C_0 + \mathfrak{b}_1 f)$ and $C_0 + \mathfrak{b}_1 f \sim D$. Suppose now that $P \in C_0$, let $\pi(P) = Q \in C_0$. It suffices to construct a section $\sigma_1 : C \to X$ corresponding to $\mathcal{E} \to \mathcal{O}(\mathfrak{d}) \to 0$ and such that $\sigma_0(Q) \neq \sigma_1(Q)$ (where σ_0 corresponds to C_0). By the solution of ex. 5.2.2, it suffices to construct $\alpha_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{O}(\mathfrak{d})$ such that

$$(\alpha_{1,Q}, \alpha_{2,Q}) : \mathcal{E}_Q \to \mathcal{O}(\mathfrak{e})_Q \oplus \mathcal{O}(\mathfrak{d})_Q$$

is an isomorphism (where $\alpha_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{O}(\mathfrak{e})$ is "canonical").

Choose $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ as above, such that $Q \notin Supp(\mathfrak{d}_1)$ (this is possible, since $|\mathfrak{d}|, |\mathfrak{d} - \mathfrak{e}|$ are base point free). Let

$$\alpha_2 := f = \widetilde{f_1} + \lambda \cdot \widetilde{f_2}$$

be given as above for a suitable λ. Note that

$$(\alpha_{1,Q}, \alpha_{2,Q})(\mathcal{O}_Q) = (0, f_{1,Q})(\mathcal{O}_Q) = 0 \oplus \mathcal{O}(\mathfrak{d})_Q \subset \mathcal{O}(\mathfrak{e})_Q \oplus \mathcal{O}(\mathfrak{d})_Q$$

(since $Q \notin Supp(\mathfrak{d}_1)$, $f_{1,Q}$ is an isomorphism). Moreover:

$$(\alpha_{1,Q}, \widetilde{f}_{2,Q}) : \mathcal{E}_Q \to \mathcal{O}(\mathfrak{e})_Q \oplus \mathcal{O}(\mathfrak{d})_Q$$

factors as:

$$\mathcal{E}_Q \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{e})_Q \xrightarrow{(id, f_2)} \mathcal{O}(\mathfrak{e})_Q \oplus \mathcal{O}(\mathfrak{d})_Q$$

with the image $\{(a, f_2(a)) : a \in \mathcal{O}(\mathfrak{e})_Q\}$. This easily implies that $(\alpha_{1,Q}, \alpha_{2,Q})$ is a surjection.

Solution II:

Lemma A divisor $D = C_0 + \mathfrak{b}f$ on a ruled surface X is base point free iff for every $P \in C$:

$$\dim \Gamma(\mathcal{O}_X(D - Pf)) = \dim \Gamma(\mathcal{O}_X(D)) - 2.$$

Proof: we will prove only ($\Leftarrow$), as this is all we will need. Let $Q \in X$, $\pi(Q) = P$. Consider the exact sequence:

$$0 \to \mathcal{O}_X(D - Pf) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_{Pf}(D) \to 0$$

which induces:

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D - Pf)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_{Pf}(D)) \qquad (\dagger)$$

Note that $D.Pf = C_0.Pf = 1$, which implies that $\mathcal{O}_{Pf}(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. But $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = 2$. Thus by the assumption on the dimensions, the last arrow in $(\dagger)$ is surjective. The linear system associated to $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ is base point free and thus we may find a divisor D' in this linear system that does not contain Q. By $(\dagger)$, there exists a divisor D'' in the linear system $|D|$ that is equal to D' after restricting to Pf. Thus $D'' \in |D|$ and $Q \notin Supp(D'')$ as desired.

We have:

$$0 \to \mathcal{O}_X(\mathfrak{b}f) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_{C_0}(D) \to 0. \qquad (\dagger\dagger)$$

Note that $\mathcal{O}_{C_0}(D) = \mathcal{O}_{C_0}(\mathfrak{e} + \mathfrak{b})$ – indeed, by Proposition V.2.6.:

$$\mathcal{O}_{C_0}(C_0) \cong \mathcal{O}_X(C_0) \otimes \mathcal{O}_{C_0} \cong \sigma^*(\mathcal{O}(\mathfrak{e})).$$

Therefore by $(\dagger\dagger)$ we obtain:

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(\mathfrak{b}f)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_{C_0}(D)) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(\mathfrak{b}f))$$

Equivalently:

$$0 \to \Gamma(C, \mathcal{O}_C(\mathfrak{b})) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \to \Gamma(C, \mathcal{O}_C(\mathfrak{e} + \mathfrak{b})) \to H^1(C, \mathcal{O}_C(\mathfrak{b})) = 0 \quad (\star)$$

(the last equality follows since $\mathfrak{b}$ is non-special). In an analogous way, for any $P \in C$:

$$0 \to \Gamma(C, \mathcal{O}_C(\mathfrak{b} - P)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D - Pf)) \to \Gamma(C, \mathcal{O}_C(\mathfrak{e} + \mathfrak{b} - P)) \to H^1(C, \mathcal{O}_C(\mathfrak{b} - P)) = 0 \quad (\star\star)$$

(note that $\mathfrak{b} - P$ is nonspecial – indeed, this follows from the exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}(\mathfrak{b} - P) \to \mathcal{O}(\mathfrak{b}) \to \mathcal{O}_P \to 0$$

and the equality $|\mathfrak{b} - P| = |\mathfrak{b}| - 1$, which is true since P is not a base point of C). Therefore:

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^0(\mathcal{O}_X(D - Pf)) &= (h^0(\mathcal{O}_C(\mathfrak{b})) - h^0(\mathcal{O}_C(\mathfrak{b} - P))) + (h^0(\mathcal{O}_C(\mathfrak{b} + \mathfrak{e})) - h^0(\mathcal{O}_C(\mathfrak{b} + \mathfrak{e} - P))) \\ &= 1 + 1, \end{aligned}$$

where the last equality follows from the fact that $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{e}$ are base point free and Proposition IV.3.1. This ends the proof.

(b)

Lemma $D = C_0 + \mathfrak{b}f$ is very ample iff for every $P, Q \in C$:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D - (P + Q)f)) = h^0(\mathcal{O}_X(D)) - 4.$$

Proof: Again, we prove only $(\Leftarrow)$. First we want to separate different points. Let $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Consider two cases:

i. Suppose that $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$. Let $P = \pi(x_1)$, $Q = \pi(x_2)$. We have an exact sequence:

$$0 \to \mathcal{O}_X(D - (P + Q)f) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_{Pf+Qf}(D) \to 0$$

and thus:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X(D - (P + Q)f)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \to H^0(Pf, \mathcal{O}_{Pf}(D)) \oplus H^0(Qf, \mathcal{O}_{Qf}(D)). \quad (*)$$

But $H^0(Pf, \mathcal{O}_{Pf}(D)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$, and from the assumption, we easily see that the last map in $(*)$ is onto. Note that $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ is very ample. Thus we can choose $D_1 \in |D|_{Pf}|$, $D_2 \in |D|_{Qf}|$ such that $x_1 \in Supp(D_1)$, $x_2 \notin Supp(D_2)$, and then choose $D' \in |D| = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)))$ such that $D|_{Pf} = D_1$, $D|_{Qf} = D_2$. Then $x_1 \in Supp(D')$, $x_2 \notin Supp(D')$.

ii. Suppose that $\pi(x_1) = \pi(x_2) = P$. One easily sees that for any D, P:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D - Pf)) \leqslant h^0(\mathcal{O}_X(D)) - 2.$$

Thus the condition from the assumption implies that $h^0(\mathcal{O}_X(D-Pf)) = h^0(\mathcal{O}_X(D)) - 2$, which in turn implies that:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X(D-Pf)) \to H^0(\mathcal{O}_X(D)) \to H^0(\mathcal{O}_{Pf}(D|_{Pf})) \to 0 \quad (**)$$

is exact. But $D|_{Pf} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ is very ample. Thus we may choose $D' \in |D|_{Pf}|$ such that $x_1 \in Supp(D')$, $x_2 \notin Supp(D')$ and then by $(**)$ a $D'' \in |D|$ such that $D''|_{Pf} = D'$.

Now we have to separate tangent directions. Suppose that $x \in X$, $t \in T_xX$. Let $x \in Pf$. Again, consider two cases:

i. $t \in T_x(Pf)$. Again, as earlier, we find $D' \in |D|_{Pf}|$ such that $x \in Supp(D')$, but $t \notin T_xD'$, which is possible since $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ is very ample.

ii. $t \notin T_x(Pf)$. Note that x is not a base point of $D - Pf$ (by Lemma in (a)), and thus there exists $D' \in |D-Pf|$ such that $x \notin Supp(D')$. Let $D'' := D' + Pf$. Then $x \in Supp(D'')$ and $T_xD'' = T_x(Pf)$ and thus $t \notin T_xD''$.

As in (a) we obtain:

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^0(\mathcal{O}_X(D-(P+Q)f)) &= (h^0(\mathcal{O}_C(\mathfrak{b})) - h^0(\mathcal{O}_C(\mathfrak{b}-P-Q))) \\ &+ (h^0(\mathcal{O}_C(\mathfrak{b}+\mathfrak{e})) - h^0(\mathcal{O}_C(\mathfrak{b}+\mathfrak{e}-P-Q))) \end{aligned}$$

and the proof again follows from the Proposition IV.3.1 and the fact that $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}+\mathfrak{e}$ are very ample.

5.2.15 (a) Analogosly as in the proof of Proposition IV.4.21, we check that $H^1(\mathcal{O}_C) \cong H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4))$ and that the basis of $H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4))$ is

$$\{x^a \cdot y^b \cdot z^c : a,b,c < 0, a+b+c = -4\} = \{x^{-2} \cdot y^{-1} \cdot z^{-1}, x^{-1} \cdot y^{-2} \cdot z^{-1}, x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot z^{-2}\}$$

(cf. also the proof of Theorem III.5.1). Also, analogosly as in the proof of Proposition IV.4.21, $F^* : H^1(\mathcal{O}_C) \to H^1(\mathcal{O}_C)$ may be identified with the composition of

$$H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)) \xrightarrow{F_{\mathbb{P}^2}} H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4 \cdot 3))$$

$$H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4 \cdot 3)) \xrightarrow{\cdot f^{p-1}} H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)),$$

where $f = x^3 \cdot y + y^3 \cdot z + z^3 \cdot y$. To compute the image of the first element of basis via Frobenius:

$$\begin{aligned} F^*(x^{-2} \cdot y^{-1} \cdot z^{-1}) &= [f^2 \cdot x^{-2 \cdot 3} \cdot y^{-1 \cdot 3} \cdot z^{-1 \cdot 3}] \\ &= [y^{-1} - x^{-3}y^3z^{-2} + y^3z^{-1} - x^{-2}y^{-2} - x^{-5}z + x^{-4}z^3] \\ &= 0 \end{aligned}$$

(note that only the monomials $x^{-2} \cdot y^{-1} \cdot z^{-1}, x^{-1} \cdot y^{-2} \cdot z^{-1}, x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot z^{-2}$ are non-zero in $H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4))$). Analogously we show that F^* is zero on the remaining generators.

Remark: in general, for a plane curve f of degree d, in order to compute the matrix of Frobenius action in the base

$$B = \{x^ay^bz^c : a,b,c < 0, a+b+c = -d\}$$

one has to consider $F^*(x^ay^bz^c) = [f^{p-1} \cdot x^{pa}y^{pb}z^{pc}]$ and check the coefficients of the monomials from B in the last expression.

(b) Consider the diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-P) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \mathcal{O}_P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-3P) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \mathcal{O}_{3P} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

By Riemann-Roch: $h^1(\mathcal{O}_C(-P)) = 3$, $h^1(\mathcal{O}_C(-3P)) = 5$, $h^1(\mathcal{O}_C) = g_C = 3$. Moreover, since $\dim Supp(\mathcal{O}_P) = \dim Supp(\mathcal{O}_{3P}) = 0$, by Grothendieck vanishing theorem we obtain: $h^1(\mathcal{O}_P) = h^1(\mathcal{O}_{3P}) = 0$. Thus by taking the long exact sequence of cohomology we obtain the following diagram:

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathcal{O}(-P)) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f^*"] & H^1(\mathcal{O}) \arrow[d, "f^*=0"] \\ H^1(\mathcal{O}(-3P)) \arrow[r, two heads] & H^1(\mathcal{O}) \end{tikzcd}$$

where the arrow on the right is zero by (a) and the horizontal arrows are surjective. But since $h^1(\mathcal{O}_C(-P)) = h^1(\mathcal{O}_C) = 3$ and the upper arrow is surjective, it must be an isomorphism. Thus the composition:

$$H^1(\mathcal{O}) \cong H^1(\mathcal{O}(-P)) \overset{f_*}{\to} H^1(\mathcal{O}(-3P)) \twoheadrightarrow H^1(\mathcal{O})$$

is the zero map. As a consequence, the map $f_* : H^1(\mathcal{O}(-P)) \to H^1(\mathcal{O}(-3P))$ cannot be injective.

(c) Let $\mathcal{E}^{(p)} := F^*\mathcal{E}$. The canonical morphism of sheaves $\mathcal{E}^{(p)} \to \mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}^{(p)} = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} F_C^*\mathcal{O}_C \to \mathcal{E}, \qquad e \otimes 1 \mapsto e$$

yields the commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & \mathbb{P}(\mathcal{E}^{(p)}) \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Note that

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}^{(p)}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} F_C^*\mathcal{O}_C) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_C \mathbb{P}(F_C^*\mathcal{O}_C) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})^{(p)}.$$

and that the upper arrow is the relative Frobenius

$$F_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/C} : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(\mathcal{E})^{(p)}$$

in particular it is purely inseparable. Note however that since $f^*\mathcal{E} = 0$, the exact sequence:

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{E}^{(3)} \to \mathcal{O}(3P) \to 0$$

is split. In this way we obtain a section of $\mathbb{P}(\mathcal{E}^{(3)}) \to C$, denote its image by C_3. This section is disjoint with $\varphi(C_0)$ (the image of the "canonical" section of $\mathbb{P}(\mathcal{E})$). Let $Y := \varphi^{-1}(C_3)$ be the scheme theoretical inverse image of C_0. Then $\varphi|_Y$ is the relative Frobenius $F_{Y/k}$, since it is an inseparable cover of curves of degree p.

Moreover, since $C_3.\varphi(C_0) = 0$, one easily checks that $Y.C_0 = 0$. Also, $C_3.f = 1$ easily implies that $Y.f = 3$ (the ramification degree of Frobenius at any point is 3). This easily implies that $Y \equiv 3C_0 - 3f$.

Let $D = 2C_0$. Then, one hand D satisfies the hypotheses of (2.21b), but on the other hand, it is not ample, since $D.Y = -3 - 3 = -6 < 0$.

Subsection 5.3

5.3.1 We mimic the proof of Proposition V.3.4 and Corollary V.3.5. Let $\mathcal{I} \leqslant \mathcal{O}_X$ the the ideal sheaf of Y. Since the blow-up π is a isomorphism above $X\backslash Y$, the sheaves $\mathcal{F}^i := R^i\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ (where $i > 0$) are supported on Y. Let:

$$E_n := \widetilde{X} \times_X Spec(\mathcal{O}_{X,y}/\mathcal{I}^n)$$

Then by formal functions theorem (as the version on wikipedia):

$$(\mathcal{F}^i)^\wedge \cong \varprojlim_n R^i\pi_*(\mathcal{O}_{E_n}) \qquad (*),$$

Moreover:

- E_n is the closed subscheme of $\widetilde{X}$ given by the ideal $\mathcal{J}^n$ (where $\mathcal{J} := \bigoplus_{k\geqslant 1}\mathcal{I}^k$ is the ideal sheaf of E, the exceptional set)

  Pf: $E_n = \underline{Proj}((\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathcal{I}^k) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n) = \underline{Proj}(\bigoplus_{k\geqslant n}\mathcal{I}^k/\mathcal{I}^{k+1}) = \underline{Proj}((\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathcal{I}^k)/\mathcal{J}^n)$.
- $R^i\pi_*(\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}) = 0$ for $i \geqslant 1$ and $n \geqslant 0$.

  Pf: indeed, note that $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ is a vector bundle of rank d, cf. [Thm II.8.17.] and thus $E = \mathbb{P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ is a projective bundle over Y (cf. Theorem II.8.24. (b)) and $\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1} = S^n(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) = \mathcal{O}_E(n)$. Thus the proof follows by the below lemma:

Lemma If $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to Y$ is a projective bundle, then for every $n \geqslant 0$ and $i > 0$:

$$R^i\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(n)) = 0.$$

Proof: by Cech coverings, see [Stack 01XX].

- $R^i\pi_*(\mathcal{O}_{E_n}) = 0$ for $i \geqslant 1$, $n \geqslant 1$.

  Pf: by noting that
  $$0 \to \mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1} \to \mathcal{O}_{E_{n+1}} \to \mathcal{O}_{E_n} \to 0,$$
  taking the long exact sequence for π_* and using $R^i\pi_*(\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}) = 0$, we see that
  $$R^i\pi_*(\mathcal{O}_{E_{n+1}}) \cong R^i\pi_*(\mathcal{O}_{E_n}).$$
  But $R^i\pi_*(\mathcal{O}_{E_1}) = R^i\pi_*(\mathcal{O}_E) = R^i\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)}) = 0$ for $i \geqslant 1$ (by the above Lemma).
- $\widehat{\mathcal{F}}^i \cong \mathcal{F}^i$ – this follows, since $\mathcal{F}^i$ is supported on Y. Indeed, $\mathcal{I}\mathcal{F}^i = 0$ and thus $\widehat{\mathcal{F}}^i = \lim_{\leftarrow,n} \mathcal{F}^i/\mathcal{I}^n\mathcal{F}^i = \lim_{\leftarrow} \mathcal{F}^i = \mathcal{F}^i$.

Thus by $(*)$ $\mathcal{F}^i = 0$.

The fact that $\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \cong \mathcal{O}_X$ follows again from the fact that X is normal and π is birational (Cf. proof of (III, 11.4)). Now from Ex. III.8.1 or Leray spectral sequence we conclude that $H^i(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \cong H^i(X, \mathcal{O}_X)$ for all $i \geqslant 0$. Thus:
$$p_a(\widetilde{X}) = (-1)^{\dim \widetilde{X}}(\chi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) - 1) = (-1)^{\dim X}(\chi(\mathcal{O}_X) - 1) = p_a(X).$$

Remark: it is also possible to prove this, using the usual version of Formal Functions Theorem, by taking an aribitrary $y \in Y$ and noting that the fiber $\widetilde{X}_y \to Spec(k(y))$ is a projective space over $k(y)$, cf. Math StackExchange, q

5.3.2 Let r, s be the multiplicities of C and D at P, respectively. Recall that $\pi^*C = \widetilde{C} + rE$, $\pi^*D = \widetilde{D} + sE$. Thus:

$$\widetilde{C}.\widetilde{D} = (\pi^*C - rE).(\pi^*D - sE) = \pi^*C.\pi^*D - r\pi^*C.E - sE.\pi^*D + rsE.E = C.D - 0 - 0 + rs.$$

This proves the first part. As for the second part, keep blowing up the surface at all intersection points of C and D that do not meet transversally. Let $C_n := \widetilde{C}_{n-1}$, $D_n := \widetilde{D}_{n-1}$ be the images under those blow-ups. For $n \gg 0$, we will obtain that C_n and D_n will meet transversally and C_n, D_n do not posses any multiple points. Thus $C_n.D_n = \sum_{P \in C_n \cap D_n} 1 = \sum_{P \in C_n \cap D_n} \mu_P(C_n) \cdot \mu_P(D_n)$ and
$$C.D = \sum_i r_i s_i + C_n.D_n = \sum_{P \in C \cap D} \mu_P(C) \cdot \mu_P(D)$$
(the last sum including infinitely near points).

5.3.3 Let $\mathcal{D} := 2\pi^*D - E$. We'll use the Nakai-Moishezon criterion.

Lemma Every irreducible curve on $\widetilde{X}$ is of the form $\widetilde{C}$ for some irreducible curve $C \subset X$ or E.

- $\mathcal{D}^2 > 0$:

  Proof:
  $$\mathcal{D}^2 = (2\pi^*D)^2 + E^2 + 4 \cdot \pi^*D.E = 4D^2 - 1 + 0 > 0,$$
  since D is very ample and thus $D^2 = \deg X > 1$.
- $\mathcal{D}.E > 0$:

  Proof:
  $$\mathcal{D}.E = (2\pi^*D - E).E = 0 - E^2 = 1.$$

- $\mathcal{D}.\widetilde{C} > 0$:

  Proof: using Proposition V.3.6. (where $r = \mu_P(C)$) and Ex. V.1.2:

  $$\mathcal{D}.\widetilde{C} = (2\pi^* D - E)(\pi^* C - rE) = 2\pi^* D.\pi^* C - E.\pi^*(C + D) + r \cdot E^2 = 2 \cdot \deg C - r$$

  (here deg denotes the degree under the embedding $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ given by D). To finish the proof we need the following Lemma:

  Lemma Suppose that C is a curve on surface $X \subset \mathbb{P}^N$. Then for any $P \in C$:

  $$\mu_P(C) \leqslant \deg C.$$

  Proof: let D be any very ample divisor on X such that $P \in D$. Then by the previous problem:

  $$\deg C = C.D = \sum_{Q \in C \cap D} \mu_Q(C) \cdot \mu_Q(D) \geqslant \mu_P(C).$$

  (one has to assume that D is a curve *for this proof to work – but maybe it can be done using Bertini?)*

5.3.5 Let $r = 2g + 2 - \delta$, where $\delta \in \{0, 1\}$. The projective closure of this curve is:

$$Y^2 Z^{r-2} = \prod_{i=1}^{r} (X - a_i Z).$$

By substituting $Z = 0$, we see that the only point at infinity is $P = [0 : 1 : 0]$ and by compitng partial derivatives, we see that P is singular. Take the affine subset $\{Y \neq 0\}$, given by the equation:

$$z_0^{r-2} = \prod_{i=1}^{r} (x_0 - a_i z_0)$$

(where $x_0 = X/Y$, $z_0 = Z/Y$).

First blow up:

Take the blow up C_1 – it is given by:

$$\begin{cases} z_0^{r-2} = \prod_{i=1}^{r} (x_0 - a_i z_0) \\ u_1 z_0 = z_1 x_0. \end{cases}$$

Take the affine part $z_1 \neq 0$ – we will show that it doesn't contain preimages of P:

$$x_0 = u_1 z_0 \quad \Rightarrow \quad z_0^{r-2} = \prod_{i=1}^{r} (u_1 z_0 - a_i z_0) 1 = z_0^2 \cdot \prod_{i=1}^{r} (u_1 - a_i)$$

and by substituting $z_0 = 0$ we see that there are no solutions. On the affine part $u_1 \neq 0$ we have:

$$z_0 = z_1 x_0 \quad \Rightarrow \quad (z_1 x_0)^{r-2} = \prod_{i=1}^{r} (x_0 - a_i z_1 x_0) \quad \Rightarrow \quad z_1^{r-2} = x_0^2 \cdot \prod_{i=1}^{r} (1 - a_i z_1)$$

If $r > 2$, this is still singular at $P_1 = (0, 0)$.

The next blow up-s are similar:

n**th blow up:** (for $n = 2, 3, \ldots, t$, where $t := g + 1 - \delta$)

in the previous step we obtained the curve:

$$C_{n-1} : z_1^{r-2n+2} = x_{n-2}^2 \cdot \prod_{i=1}^{r} (1 - a_i z_1)$$

with a singular point $P_{n-1} = (0, 0)$. We blow up by substituting $u_n x_{n-2} = z_1 x_{n-1}$ and on $u_n \neq 0$ we obtain:

$$z_1^{r-2n+2} = z_1^2 x_{n-1}^2 \cdot \prod_{i=1}^{r} (1 - a_i z_1)$$

$$z_1^{r-2n} = x_{n-1}^2 \cdot \prod_{i=1}^{r} (1 - a_i z_1)$$

with the preimage of P_{n-1} being $P_n = (0, 0)$. On $u_n = 0$ there are no preimages of P_{n-1}.

The last step: after the final blow up we obtain the curve:

$$z_1^\delta = x_{t-1}^2 \cdot \prod_{i=1}^r (1 - a_i z_1).$$

- if $\delta = 1$, there is only one point over P: $(0,0)$,
- if $\delta = 0$, there are precisely 2 points over P: $(z_1, x_{t-1}) = (0, \pm 1)$.

To get the usual form of the normalization, multiply the last equation by $\frac{z_1^\delta}{x_{t-1}^2}$:

$$\left(\frac{z_1^\delta}{x_{t-1}}\right)^2 = z_1^\delta \cdot \prod_{i=1}^r (1 - a_i z_1)$$

and substitute $u = z_1$, $w = \frac{z_1^\delta}{x_{t-1}}$ to get:

$$w^2 = u^\delta \cdot \prod_{i=1}^r (1 - a_i u).$$

Now we want to figure out, how to glue $y^2 = f(x)$ and $w^2 = f^*(u)$. Note that

$$\begin{aligned} x_0 = X/Y = x/y, \quad z_0 = Z/Y &= 1/y \\ z_1 = z_0/x_0 &= 1/x, \\ x_n = \frac{x_{n-1}}{z_1} = \ldots = (\frac{x_0}{z_0})^n \cdot x_0 &= \frac{x^{n+1}}{y} \\ w = \frac{z_1^\delta}{x_{t-1}} &= \frac{y}{x^{g+1}} \end{aligned}$$

i.e. finally $(u, w) = (1/x, y/x^{g+1})$.

Genus: ????

Subsection 5.4

5.4.5 Let l_{ij} $(i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j)$ be the 6 lines AB', AC', $\ldots$, CB', let Q be the quadrics through A, B, C, A', B', C' and let l be the line PQ. Consider the family of cubics:

$$Q_\lambda := l_{21} l_{13} l_{32} - \lambda l_{12} l_{23} l_{31}$$

(where $\lambda \in \mathbb{C}$ is a parameter) and note that for every λ, Q_λ contains the nine points $A, B, \ldots, C', P, Q, R$.

By Corollary V.4.5., there exists a unique point R' such that every cubic containing eight points $A, B, \ldots, C', P, Q$ contains R'. Note that $Q_\lambda \cap Q_{\lambda'}$ has nine points (Bezout theorem): $A, \ldots, R$ and on the other hand $R' \in Q_\lambda \cap Q_{\lambda'}$, which easily implies that $R' = R$.

Consider now the cubic:

$$Q \cdot l$$

and note that the eight points $A, B, \ldots, C', P, Q$ belong to it. Thus R also belongs to it, which is possible only if $R \in l$ (if we would have $R \in Q$ then the line l_{21} would have 3 intersection points with Q, contradicting Bezout theorem). This ends the proof.

5.4.12 Note that by Theorem V.4.11, D is very ample, thus there exists a smooth divisor in $|D|$ by Bertini theorem; WLOG D is smooth. Consider the short exact sequence:

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0,$$

giving rise to:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X(-D)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X) \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0 \qquad (*)$$

(the last equality follows by the fact that $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 0$ and by Proposition V.3.4.). Moreover, $H^0(X, \mathcal{O}_X(-D)) = 0$ (the "obvious" case of Kodaira vanishing) and $h^0(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \mathcal{O}_D) = 1$ (all regular functions on a projective variety are constant). Thus by $(*)$ we easily obtain $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) = 0$.

Subsection 5.5

5.5.2 We mimic the proof of Theorem V.5.7. Let $Y.Y = -s$ for $s > 0$ and choose a very ample divisor H such that:

- $H^1(X, H) = 0$,
- $Y.H = k \cdot s$ for some $k \in \mathbb{Z}_+$.

Let $\mathcal{M} := \mathcal{O}_X(H + kY)$.

- **Step I:** $\mathcal{M}$ is generated by global sections (and thus defines a map $f : X \to \mathbb{P}^N$).
- **Step IA:** $H^1(\mathcal{O}_X(H + iY)) = 0$ for $i = 0, \ldots, k-1$.

  Pf: we prove this by induction on i. For $i = 0$ this follows by the above assumption. Suppose it holds for $i-1$. Consider the exact sequence

  $$0 \to \mathcal{O}_X(H + (i-1)Y) \to \mathcal{O}_X(H + iY) \to \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_X(H + iY) \to 0$$

  and note that $\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_X(H + iY) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(H.Y + iY.Y) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(s \cdot (k+i))$. By taking the long exact sequence and observing that $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(s \cdot (k-i))) = 0$ (since $s > 0$, $k - i > 0$) we obtain the desired equality.
- **Step IB:** $H^0(X, \mathcal{M}) \to H^0(Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_Y)$ is onto.

  Pf: consider the exact sequence:

  $$0 \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(-Y) \to \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_Y \to 0,$$

  take long exact sequence and note that $H^1(\mathcal{O}(H + (k-1)Y)) = 0$ by a previous step.
- **Step IC:** Note that $\mathcal{M}$ is generated by global sections away from Y, since $|H + kY|$ has no base points away from Y.
- **Step ID:** $\mathcal{M}$ is generated by global sections also on Y.

  Pf: note that $\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(H.Y + kY.Y) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ and $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ is generated by the global section 1. Lifting this global section to $\mathcal{M}$ by Step IB, and using Nakayama, we see that on Y, $\mathcal{M}$ is generated by this section.
- **Step II:** f is an isomorphism away from Y and $f(Y)$ is a point.

  Pf: note that since H is very ample, the linear system $|H + kY|$ separates points and tangent vectors away from Y, and also separates points of Y from points not on Y. Moreover, $\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. But the morphism $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^N$ given by the trivial sheaf on $\mathbb{P}^1$ is a constant morphism, hence the image of Y is a point.

This ends the proof.

5.5.3 Use the projection formula (Ex. III.8.3) with $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ and $\mathcal{E} = \Omega_{X/k}$ (note that $\mathcal{E}$ is locally free, since ????), to obtain for $i > 0$:

$$R^i\pi_*(\pi^*\Omega_{X/k}) \cong R^i\pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \otimes \pi^*\Omega_{X/k} = 0$$

(the last equality – by Proposition V.3.4). Thus by Leray Spectral Sequence (cf. also ex. III.8.1) $H^i(\widetilde{X}, \pi^*\Omega_{X/k}) \cong H^i(X, \pi_*\pi^*\Omega_{X/k}) \cong H^i(X, \Omega_{X/k})$ (by Projection Formula, $\pi_*\pi^*\Omega_{X/k} \cong \Omega_{X/k} \otimes \pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \cong \Omega_{X/k}$).

We'll show now that $\Omega_{\widetilde{X}/X} = \Omega_E$. This is obvious out of E, since both sheaves vanish there. Let $U = Spec(A)$ be a neighbourhood of P with local coordinates x, y. Then $\pi^{-1}(U) = Proj(A[t,u]/(ty - xu))$. Consider the „affine" piece with $t = 1$: $W := Spec(A[t,u]/(ty - xu, t-1)) = Spec(A[u]/(y - xu))$. Then $\Omega_{\widetilde{X}/X}|_W$ is the coherent sheaf corresponding to:

$$\frac{A[u]/(y - xu)\,du}{\Big(d(y - xu)\Big)} =$$

(note that d is A-linear)

$$= \frac{A[u]/(y - xu)\,du}{\Big(x\,du\Big)} = A[u]/(x, y)\,du =$$

(since $A/(x, y) = k$)

$$= k[u]\,du,$$

which is just $\Omega_{\mathbb{A}^1_u} = \widetilde{k[u]\,du}$.

Consider the „first exact sequence":

$$0 \to \pi^*\Omega_X \to \Omega_{\widetilde{X}} \to \Omega_{\widetilde{X}/X} \to 0. \qquad (*)$$

We start by proving that it is exact also on the left. Indeed, let $Q \in \widetilde{X}$, we want to check that $\Omega_{X,\pi(Q)} \to \Omega_{\widetilde{X},Q}$ is injective. If $\pi(Q)$ is not center of π then this is an isomorphism. Suppose that $\pi(Q)$ is the center of π. Then π is locally of the form $Proj(A[s,t]/(ty - sx)) \to Spec(A)$ (for x, y – local coordinates around $\pi(Q)$) and $\Omega_{X,\pi(Q)} \to \Omega_{\widetilde{X},Q}$ is of the form:

$$A'dx + A'dy \to dB'$$

where $A' = \mathcal{O}_{X,\pi(Q)}$, $B' := A'[s]/(y - sx)$. It is easy to check that this is injective.

By taking the long exact sequence of $(*)$, and noting that $\Omega_{\widetilde{X}/X} = \Omega_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$, we obtain:

$$\ldots \to \Gamma(\Omega_{\widetilde{X}/X}) = \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0 \to H^1(X, \Omega_X) = H^1(\widetilde{X}, \pi^*\Omega_X) \to H^1(\widetilde{X}, \Omega_{\widetilde{X}}) \to H^1(X, \Omega_E) = H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) \cong k.$$

We are left with showing that the map $H^1(\widetilde{X}, \Omega_{\widetilde{X}}) \to H^1(E, \Omega_E)$ is non-zero. But this map is by definitions the map $\langle \eta(E), - \rangle$ (in the notation of the exercises III.7.4 and V.1.8). Since $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is non-degenerate, we have to show that $\eta(E) \neq 0$. But $\langle \eta(E), \eta(E) \rangle = E.E = -1$. This ends the proof.

5.5.4 By Corollary V.5.4., we may present $f : X \to X'$ as:

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} X_n = X',$$

where f_i is the blow-up of X_i at some $P_i \in X_i$.

(a) We will prove the theorem by induction on n. If $n = 0$, this is obvious. Fix n. Consider the following three cases:

- $P_1 \notin f_1(Y)$.
  In this case, since f_1 is an isomorphism over $X_1 \backslash \{P_1\}$. In particular, $Y = \pi^*Y_1 \cong Y_1$ and $Y.Y = \pi^*Y_1.\pi^*Y_1 = Y_1.Y_1$ and the proof follows by induction hypothesis.
- $f(Y) = P_1$.
  In this case Y is the exceptional divisor and $Y \cong \mathbb{P}^1$, $Y.Y = -1$.
- $f(Y) = Y_1$ is an irreducible curve with $P_1 \in Y_1$.
  In this case, $Y = \widetilde{Y_1}$ is the strict transform of Y_1. Thus $Y \equiv \pi^*Y_1 - rE$ (r – multiplicity of P_1 on Y_1, E – exceptional divisor) and $Y^2 = (\pi^*Y_1 - rE)^2 = Y_1^2 - r^2$. By induction hypothesis, $Y_1 \cong \mathbb{P}^1$ and $Y_1.Y_1 < 0$. Thus $Y^2 < 0$. Moreover, Y is the blow-up of $\mathbb{P}^1$ at one point – thus $Y \cong \mathbb{P}^1$.

(b) Let $W_{X,P} \subset NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ be the subspace spanned by the curves Γ with $f(\Gamma) = P$. We have to show that for any $D \in W_X$, $D \neq 0$, we have $D^2 < 0$. Again, we will prove the theorem by induction on n. If $n = 0$, this is obvious. Fix n. Consider two cases:

1^o $P_1 \neq P$.

Let $Y_1, \ldots, Y_s$, $Z_1, \ldots, Z_t$ be the irreducible curves that form the basis of $W_{X_1,P}$, where $P_1 \in Y_1, \ldots, Y_s$ and $P_1 \notin Z_1, \ldots, Z_t$. Then $W_{X,P}$ is spanned by $\widetilde{Y_1}, \ldots, \widetilde{Y_t}$ and $\pi^*Z_1, \ldots, \pi^*Z_t$. Thus, if $D \in W_{X,P}$ then:

$$D = \sum_i a_i \widetilde{Y_i} + \sum_i b_i \pi^* Z_i \equiv \sum_i a_i(\pi^*Y_i - r_iE) + \sum_i b_i \pi^* Z_i$$

(where r_i is the multiplicity of P_1 on Y_i) and thus:

$$\begin{aligned} D^2 &= (\sum_i a_i(\pi^*Y_i - r_iE) + \sum_i b_i\pi^*Z_i)^2 \\ &= (\pi^*D' - rE)^2 = (\pi^*D')^2 + r^2E^2 - 2rE.\pi^*D' \\ &= (D')^2 - r^2 - 0 < 0, \end{aligned}$$

since $(D')^2 < 0$ by induction hypothesis.

2^o $P_1 = P$.

In the notation of 1^o, $W_{X,P}$ is now spanned by $\widetilde{Y_1},\dots,\widetilde{Y_t}$, $\pi^*Z_1,\dots,\pi^*Z_t$ **and** the exceptional divisor E. Thus if $D\in W_{X,P}$ then:

$$D=\sum_i a_i\widetilde{Y_i}+\sum_i b_i\pi^*Z_i+cE\equiv\sum_i a_i(\pi^*Y_i-r_iE)+\sum_i b_i\pi^*Z_i+cE$$

and analogously:

$$\begin{aligned}D^2&=(\pi^*D'-rE)^2=(\pi^*D')^2+r^2E^2-2rE.\pi^*D'\\&=(D')^2-r^2-0<0,\end{aligned}$$

since $(D')^2<0$ by induction hypothesis.

5.5.7 Let $|H|$ be a very ample divisor on X_0. Let $H_0,H_1\in|H|$, $P\in H_0$, $P\notin H_1$ (we can choose H_0, H_1, since H is very ample). Note that $P\notin H_1$ implies $Y.f^*H_1=0$, since $f(Y)=P$. On the other hand, $H_1\sim H_0$ and thus $f^*H_1\sim f^*H_0$ and $Y.f^*H_0=0$.
We'll prove that $f^*H_0=\widetilde{H_0}+rY$ for some $r\in\mathbb{Z}_{>0}$. Indeed:

- $(f^*H_0)|_{X\setminus Y}=\widetilde{H_0}|_{X\setminus Y}$ (as divisors),
- $f^*H_0=\widetilde{H_0}\cup Y$ (as sets),
- $f^*H_0\neq\widetilde{H_0}$ – indeed, otherwise $Y\subset\widetilde{H_0}$. But ...????

Thus:

$$0=Y.f^*H_0=Y.(\widetilde{H_0}+rY)=Y.\widetilde{H_0}+rY^2\quad Y^2=-\frac{1}{r}Y.\widetilde{H_0}$$

and the last expression is negative (since $\widetilde{H_0}$ is a curve that must meet Y).

5.5.8 *Remark: "Show that z is irreducible in A..." should be replaced by "Show that z is prime in A..."*

(a)
- z is **prime** in A:
  note that $A/(z)=k[x,y]/(x^2+y^3)$ and this ring is an integral domain. Thus z is prime.
- $t\in k[u,v]$:
  $0=x^2+y^3+z^5=x^2+y^3+t^{-5}\Rightarrow\quad t=-(t^6\cdot x^2+t^6\cdot y^3)=-(u^2+v^3)$.
- $A[z^{-1}]=k[u,v,t^{-1}]$: note that $u,v,t^{-1}\in A[z^{-1}]$. Moreover, $z^{-1}=t\in k[u,v]$. Obviously, $x=t^{-3}\cdot u\in k[u,v,t]$, $y=t^{-2}\cdot v\in k[u,v,t]$.
- A is UFD:
  Note that $A[z^{-1}]=k[u,v,z]=k[U,V,Z]/(Z\cdot(U^2+V^3)+1)=k[U,V,\frac{1}{U^2+V^3}]$. But a localization of a UFD is UFD and thus $A[z^{-1}]$ is a UFD.
  But if a localization of a ring on a prime element is a UFD, then the original ring must also be UFD. This ends the proof.

(b) We will use the following simple principles:
- if C_1 is a curve on X, $P\notin C_1$, $\pi:\widetilde{X}\to X$ is a blow-up on P, and $E=\pi^{-1}(P)$ is an exceptional divisor, then $\pi^{-1}(C_1)\cap E=\varnothing$,
- if C is a curve on X, E – exceptional divisor of the blow up $\widetilde{X}\to X$ with respect to P and $P\in C$, then $\widetilde{C}\cap E\neq\varnothing$.

By abuse of notation, we will denote any curve in the same way as its strict transform.

First blow-up: Let us perform blow-up at $P_1=(0,0,0)$:

$$\begin{cases}xy_1=yx_1\\yz_1=zy_1\\zx_1=xz_1\end{cases}$$

- on the patch $x_1\neq0$ we obtain a smooth surface $1+y_1^3x+z_1^5x^3=0$,
- on the patch $y_1\neq0$ we obtain a smooth surface $x_1^2+y+z_1y^3=0$,

- on the patch $z_1 \neq 0$ we obtain a surface $x_1^2+y_1^3z+z^3 = 0$ with a singularity at $(x_1, y_1, z) = (0,0,0)$. Note that the exceptional divisor is $z = x_1 = 0$ (actually it is a double line iwth the equation $z = x_1 = 0$), which we denote by ℓ_1. Note that it passes through the singular point.

2^{nd} **blow-up:** Now we blow-up $x^2 + y^3z + z^3 = 0$ at $P_2 = (0,0,0)$. The only non-smooth patch is $y_1 \neq 0$ with the equation $x_1^2 + y^2z_1 + yz_1^3 = 0$. The strict transform of ℓ_1 (denoted again by ℓ_1) is $z_1 = x_1 = 0$. The exceptional divisor is $\ell_2 : y = x_1 = 0$. Note that both lines pass through the singular point.

3^{rd} **blow-up:** Now we blow-up $x^2 + y^2z + yz^3 = 0$ at $P_3 = (0,0,0)$. Now there are two non-smooth patches:

- $y_1 \neq 0$ with the equation: $x_1^2 + yz_1 + y^2z_1^3 = 0$. It has a singularity in $P_4 = (0,0,0)$. We compute now the strict transform of $\ell_1 : z = x = 0$:
$$x_1^2 + yz_1 + y^2z_1^3 = 0, \quad z_1y = x_1y = 0 \text{ and } y \neq 0 \Rightarrow z_1 = x_1 = 0,$$
i.e. its given by $z_1 = x_1 = 0$ (we denote it again by ℓ_1). Again, ℓ_1 passes through this singular point. For ℓ_2:
$$x_1^2 + yz_1 + y^2z_1^3 = 0, \quad y = x_1y = 0, \quad y \neq 0$$
gives a contradiction, i.e. the strict transform of ℓ_2 does not pass through this patch. The exceptional divisor is $x_1^2 + yz_1 + y^2z_1^3 = 0$, $y = 0$, i.e. $\ell_3 : x_1 = y = 0$.
- $z_1 \neq 0$ with the equation: $x_1^2+y_1^2z+y_1z^2 = 0$. It has a singularity in $P_5 = (0,0,0)$. The strict transform of ℓ_1 does not pass through this patch. The strict transform of ℓ_2 is given by $\ell_2 : y_1 = x_1 = 0$. The exceptional divisor is $x_1^2 + y_1^2z + y_1z^2 = 0$, $z = 0$, i.e. $\ell_3 : x_1 = z = 0$.

Note in particular that ℓ_1, ℓ_2 are now disjoint, and thus will be disjoint after next blow-ups.

4^{th} **blow-up:** we blow up with respect to P_4, i.e. $x^2 + yz + y^2z^3 = 0$ at $(0,0,0)$. One easily checks that it will be smooth on every patch. We denote the exceptional divisor by ℓ_4 (one easily checks that it is a line). Note that (the strict transform of) ℓ_1 will intersect ℓ_4, since $P_1 \in \ell_1$ in the previous blow up. Analogously, $\ell_3 \cap \ell_4 \neq \varnothing$.
Obviously, $\ell_2 \cap \ell_3 = \varnothing$, since $P_4 \notin \ell_2$ in the previous blow up.
One easily checks that $\ell_1 \cap \ell_3 = \varnothing$, since ℓ_1 passes only through third patch and ℓ_3 through second patch.

5^{th} **blow-up:** we blow up with respect to P_5, i.e. $x^2 + y^2z + yz^2 = 0$ at $(0,0,0)$. Again there are two non-smooth patches:

- $y_1 \neq 0$ with the equation: $x_1^2 + yz_1 + yz_1^2 = 0$ with two singularities at $P_6 = (0,0,0)$ and $P_7 = (0,0,-1)$ (in the full set of coordinates: $(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = (0,0,0,0,1,-1)$). The strict transform of ℓ_2 does not pass through this patch, while the strict transform of ℓ_3 is $\ell_3 : x_1 = z_1 = 0$. The exceptional divisor is $\ell_5 : y = x_1 = 0$.
- $z_1 \neq 0$ with the equation: $x_1^2 + y_1^2z + y_1z = 0$ with two singularities at $P_8 = (0,0,0)$ and $P_7 = (0,1,0)$ (in the full set of coordinates: $(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = (0,0,0,0,1,-1)$ – thus it coincides with the point $(0,0,-1)$ from the previous patch). The strict transform of ℓ_2 is $\ell_2 : y_1 = x_1 = 0$. The strict transform of ℓ_3 does not pass through this patch. The exceptional divisor is $\ell_5 : x_1 = z = 0$.

6^{th} **blow-up:** we blow up with respect to P_6, obtaining exceptional divisor ℓ_6. One checks that there are no singular points of the surface on ℓ_6. Moreover, since $P_6 \in \ell_5$, $\ell_6 \cap \ell_5 \neq \varnothing$. Also, $\ell_3 \cap \ell_6 \neq \varnothing$, since $P_6 \in \ell_3$. Also, $\ell_2 \cap \ell_6 = \varnothing$, since $P_6 \notin \ell_2$. One checks that ℓ_3 and ℓ_5 become disjoint here.
7^{th} **blow-up:** we blow up with respect to P_7, obtaining exceptional divisor ℓ_7. One checks that there are no singular points of the surface on ℓ_7. Moreover, since $P_7 \in \ell_5$, $\ell_7 \cap \ell_5 \neq \varnothing$. Also, $\ell_2 \cap \ell_7 = \varnothing$, since $P_7 \notin \ell_2$, and $\ell_7 \cap \ell_6 = \varnothing$, $\ell_3 \cap \ell_6 = \varnothing$.
8^{th} **blow-up:** we blow up with respect to P_8, obtaining exceptional divisor ℓ_8. One checks that the obtained surface is smooth. Also, by direct computation one checks that ℓ_2 and ℓ_5 become disjoint. Moreover, $\ell_8 \cap \ell_5 \neq \varnothing$, $\ell_7 \cap \ell_3 = \varnothing$, $\ell_8 \cap \ell_2 \neq \varnothing$ (since $P_8 \in \ell_2$).

Finally, we obtain the following graph:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\ell_1 \arrow[r] & \ell_4 \arrow[r] & \ell_3 \arrow[r] & \ell_6 \arrow[r] & \ell_5 \arrow[r] & \ell_8 \arrow[r] \arrow[d] & \ell_2 \\
 & & & & & \ell_7 &
\end{tikzcd}$$

Subsection 5.6

5.6.1 Note that $\omega_X = \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^{n-2} d_i - n - 1)$ (cf. Problem II.8.4 (e)). Thus ω_X is ample iff $\sum_{i=1}^{n-2} d_i - n - 1 > 0$. Note that for $n > 5$:

$$\sum_{i=1}^{n-2} d_i - n - 1 \geqslant 2(n-2) - n - 1 = n - 5 > 0.$$

For $n = 3$ we obtain the inequality: $d_1 > 4$, which holds unless $d_1 \in \{2, 3, 4\}$. For $n = 4$ we obtain the inequality $d_1 + d_2 > 5$, which holds unless $(d_1, d_2) \in \{(2,2), (2,3)\}$. For $n = 5$ we obtain the inequality $d_1 + d_2 + d_3 > 6$, which holds unless $(d_1, d_2, d_3) = (2, 2, 2)$. We analyse the remaining cases:

- hypersurface of degree $d_1 = 2$ in $\mathbb{P}^3$:

  Recall that $\omega_X = \mathcal{O}_X(2 - 4) = \mathcal{O}_X(-2)$. Thus the canonical divisor is anti-ample and therefore $|nK| = \varnothing$ for every n (since $H^0(\mathcal{L}^{-1}) = 0$ for any ample sheaf $\mathcal{L}$, one easily sees that $R = 0$). Therefore, X is rational.

- hypersurface of degree $d_1 = 3$ in $\mathbb{P}^3$:

  analogously, $\omega_X = \mathcal{O}_X(3 - 4) = \mathcal{O}_X(-1)$, the canonical divisor is anti-ample and therefore $|nK| = \varnothing$ for every n. Therefore, X is rational.

- intersection of hypersurfaces of degrees $(d_1, d_2) = (2, 2)$ in $\mathbb{P}^4$:

  again, $\omega_X = \mathcal{O}_X(-1)$ and thus X is rational.

- intersection of hypersurfaces of degrees:

  - $(d_1, d_2) = (2, 3)$ in $\mathbb{P}^4$,
  - $(d_1, d_2, d_3) = (2, 2, 2)$ in $\mathbb{P}^5$,
  - $d_1 = 4$ in $\mathbb{P}^3$.

  in this case, analogously, the canonical divisor is trivial. Moreover, Exercise III.5.5 implies that $q = H^1(\mathcal{O}_X) = 0$ and thus this is a K3 surface.

A. Intersection theory

A.6.6

B. Transcendental Methods

1. Suppose that $X_h \cong \mathbb{D}$ for a $\mathbb{C}$-scheme of finite type X. Note that $\mathbb{D}$ is a connected complex manifold and thus X must be smooth (in particular, irreducible). Moreover, $\mathbb{C}(X) \cong \mathbb{C}(\mathbb{D})$. But note that $\mathbb{C}(X)$ is a field of finite transcendence degree over $\mathbb{C}$ (equal to $\dim X$). However, $\mathbb{C}(\mathbb{D})$ has infinite transcendence degree. Consider for example the functions defined by $f_0(x) = x$, $f_{n+1}(x) = \exp(f_n(x))$. Suppose to the contrary that $P(f_0(x), \ldots, f_n(x)) = 0$ for some $P \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ and all $x \in \mathbb{D}$. Then $P(f_0(x), \ldots, f_n(x)) = 0$ would hold also for all $x \in \mathbb{C}$ by uniqueness of analytic functions. This is however clearly impossible – for example one an restrict to $\mathbb{R}$, take the limit $x \to \infty$ and compare the growth of the functions.