ALGEBRA 2

Zajęcia nr 1 – Wzór Cardano, wielomiany symetryczne, wzory Viete'a

---

- Wzory Cardano na rozwiązania równania $x^3 + px + q = 0$:

$$x_i = \zeta_3^i \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \zeta_3^{2i} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad i = 0, 1, 2.$$

- Wzory Viete'a:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = x^n - \sigma_1 \cdot x^{n-1} + \sigma_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + (-1)^n \cdot \sigma_0,$$

gdzie elementarne funkcje symetryczne $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ to

$$\sigma_d(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_d} x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_d}.$$

- Zasadnicze twierdzenie o wielomianach symetrycznych:

  jeżeli $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ jest symetryczny, to istnieje wielomian Q taki, że $P(x_1, \ldots, x_n) = Q(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

---

1. Suma dwóch liczb wynosi 1, zaś ich iloczyn -1. Znajdź te liczby.
2. Udowodnij, że jeżeli dwa prostopadłościany mają równą sumę długości krawędzi, pole powierzchni oraz objętość, to są one przystające.
3. Rozwiąż równanie $z^3 + 3z^2 - 12z - 18 = 0$ za pomocą wzorów Cardano. Czy równanie to ma rozwiązania całkowite?
4. Znajdź sumę pierwiastków wielomianu $z^3 + 6z^2 + 9z + 3$ i sumę ich kwadratów.
5. Zapisz wielomian:
   - $x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + zx^2$,
   - $x^3 + y^3 + z^3$

   jako funkcję elementarnych wielomianów symetrycznych.
6. Udowodnij, że jeżeli $a + b + c = 0$, to

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

7. (a) Oblicz liczbę jednomianów w wielomianie σ_k oraz wykorzystaj wzory Viete'a do dowodu wzoru dwumianowego Newtona.

   (b) Wyraź $\sum_i \alpha_i^2$, $\sum_{i<j} \alpha_i^2 \alpha_j^2$ przez $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

   (c) Niech $\Sigma_k := \sum_i \alpha_i^k$. Wyraź Σ_4 i Σ_5 przez $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ i podobnie dla Σ_6 i Σ_7 (możesz użyć pakietu komputerowego w tym celu).

   (d) Wykaż tożsamość Newtona:

$$\Sigma_k - \sigma_1 \Sigma_{k-1} + \sigma_2 \Sigma_{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} \Sigma_1 + (-1)^k \sigma_k = 0.$$

   Jak można użyć ją do wyrażenia Σ_k przez elementarne wielomiany symetryczne?

8. (a) Czy wielomiany $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$ oraz $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2$ są symetryczne?

   (b) Dla $n = 2$ zapisz wielomian $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2$ jako funkcję elementarnych wielomianów symetrycznych.

9. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą o wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wykaż, że $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ oraz $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. Wskazówka: rozważ wielomian charakterystyczny $p_A(x) := \det(xI - A)$. W jaki sposób możemy otrzymać z tego wyznacznika jednomian x^{n-1}?