Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra 2
Zima 2024/2025

Zestaw 1
Ćwiczenia 14 października 2024 (do Wykładu 1)

Zadanie 1. Dowieść, że:

(a) skończona dziedzina całkowitości jest ciałem,

(b) dziedzina całkowitości, która jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad swoim podciałem k jest także ciałem.

Zadanie 2. Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką.

(a) Dowieść, że zbiór macierzy

$$B := \{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : \quad a, b \in A\}$$

ze (zwykłymi) operacjami dodawania i mnożenia macierzy jest pierścieniem izomorficznym z pierścieniem ilorazowym $A[x]/(x^2+1)$.

(b) Dowieść, że A jest ciałem, wtedy i tylko wtedy, gdy $A \neq 0$ oraz A ma tylko niewłaściwe ideały (0 i A).

Zadanie 3. Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. Dowieść (bezpośrednio !), że każdy ideał maksymalny z A jest ideałem pierwszym. Ogólniej, niech $a \in A$ oraz niech $S = \{1, a, a^2, \ldots\}$. Dowieść, że jeśli I jest ideałem z A, który jest maksymalny spośród wszystkich ideałów rozłącznych ze zbiorem S, to I jest ideałem pierwszym.

Zadanie 4. Niech k będzie ciałem oraz $A = \mathbf{Z}$ lub $A = k[x]$.

(a) Dowieść, że jeśli f i g są dwoma elementami względnie pierwszymi z A, to mamy izomorfizm pierścieni $A/(fg) \cong A/(f) \times A/(g)$. Nie korzystać z TCR.

(b) Dowieść, że gdy $b \in k$, to istnieją trzy nieizomorficzne pierścienie ilorazowe $k[x]/(x^2-b)$.

(c) Sprawdź, że $x^2 + x + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbf{F}_2[x]$ i wykorzystaj ten fakt do konstrukcji ciała złożonego z czterech elementów $\mathbf{F}_4$. Podobnie, pokaż, że $x^2 + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbf{F}_3[x]$ i zbuduj ciało dziewięcioelementowe $\mathbf{F}_9$. Sprawdź, że mnożenie w $\mathbf{F}_9$ można zadać wzorem: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

(d) Dowieść, że wielomian $x^5 - x^2 + 1$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbf{F}_2[x]$ i w konsekwencji jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbf{Q}[x]$.

Zadanie 5. Niech a będzie obrazem elementu x w pierścieniu ilorazowym $\mathbf{Q}[x]/(x^3 + 3x + 3)$. Wyznaczyć elementy $1/a$, $1/(1 + a)$ oraz $1/(1 + a^2)$ w postaci $c_2a^2 + c_1a + c_0$, dla $c_i \in \mathbf{Q}$.