Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Zestaw 10

Ćwiczenia 13 i 20 stycznia 2025 (do Wykładów 10 i 11)

Zadanie 1.
Niech K będzie ciałem rozkładu wielomianu x^3-2 (odpowiednio: x^4-2) nad ciałem $k=\mathbf{Q}$. Wyznaczyć wszystkie ciała pośrednie $k \subseteq F \subseteq K$. **Wskazówka.** Porównaj [DF], str. 544. Przydatna będzie znajomość wszystkich podgrup w grupach S_3 i D_4.

Zadanie 2.
Niech $K=\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-3}, \sqrt[3]{5})$ oraz $k=\mathbf{Q}$. Dowieść, że K/k jest rozszerzeniem Galois z grupą Galois $Gal(K/k) = \mathbf{Z}/2\times S_3$. Wyznacz cztery ciała pośrednie $k \subseteq F \subseteq K$.

Zadanie 3.
(a) Niech będzie dane ciało F charakterystyki różnej od 2 oraz elementy $d_1, d_2 \in F$, które nie są kwadratami w F. Dowieść, że $F(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})/F$ jest stopnia 4, jeśli $d_1 d_2$ nie jest kwadratem w F, oraz jest stopnia 2 w przeciwnym przypadku. Rozszerzenie $F(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})/F$ stopnia 4 nazywamy **rozszerzeniem dwukwadratowym**. Obliczyć grupę Galois rozszerzenia dwukwadratowego.
(b) "$Gal(\mathbf{Q}(\sqrt{3+\sqrt{5}})/\mathbf{Q})=\mathbf{Z}/2\times\mathbf{Z}/2$" Niech $char\, F \neq 2$ oraz niech $a, b \in F$ nie będą kwadratami. Dowieść, że:

$$F(\sqrt{a+\sqrt{b}})=F(\sqrt{m}+\sqrt{n})$$

dla pewnych $m, n \in F$, wtedy i tylko wtedy, gdy a^2-b jest kwadratem w F. Kiedy rozszerzenie $F(\sqrt{a+\sqrt{b}})/F$ jest dwukwadratowe ?

Zadanie 4. (10 pts.)
Niech k będzie ciałem i $L=k(t)$. Niech G będzie grupą $k-$automorfizmów ciała L generowanym przez automorfizmy: $\sigma : t \mapsto 1 - t$ oraz $\tau : t \mapsto 1/t$.

(a) Dowieść, że $\sigma^2=\tau^2=(\sigma\tau)^3=\mathrm{id}$ i wywnioskować, z tego że $G\cong S_3$.

(b) Wyznaczyć ciała stałe dla σ i dla τ, odpowiednio oraz dowieść, że $L^{<\sigma\tau>}=k(y)$, gdzie $y=\frac{t^3-3t+1}{t(t-1)}$. Sprawdzić, że $y+\sigma(y)=3$ i wywnioskować z tego, że $L^G=k(z)$, gdzie $z=y\sigma(y)$. Korzystając z podstawowego twierdzenia teorii Galois wyznaczyć wszystkie ciała pośrednie $L^G=: K \subset F \subset L$.

Zadanie 5. (10 pts.)
Niech k będzie ciałem, które zawiera pierwiastek pierwotny stopnia n z jedynki ϵ. Niech $K = k(t)$, gdzie t jest elementem przestępnym nad k.

(a) Dowieść, że istnieją k-automorfizmy $\sigma, \tau : K \to K$ takie, że $\sigma(t) = \epsilon t$ i $\tau(t) = t^{-1}$ oraz, że σ i τ generują grupę G złożoną z automorfizmów ciała K, izomorficzną z grupą dihedralną D_{2n}.

(b) Wyznaczyć *ciała stałe* (tzn. ciała elementów stałych) dla podgrup cyklicznych $<\sigma>$ i $<\tau>$ grupy G.

(c) Dowieść, że ciało stałe $K^G = k(t^n+t^{-n})$.