Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Zestaw 11
Ćwiczenia do Wykładów 12, 13 i 14)

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie rozszerzenia Galois stopnia 4.

(a) Dokładniej, dowieść, że rozszerzenie Galois z grupą Galois $\mathbf{Z}/2\times\mathbf{Z}/2$ jest postaci $k(\alpha, \beta)$ takie, że $\alpha^2, \beta^2 \in k$ oraz $(\alpha\beta)^2 \notin k$,

(b) rozszerzenie Galois z grupą Galois $\mathbf{Z}/4$ pochodzi z równania $(x^2-a)^2-b=0$ dla $a\neq 0$, $\sqrt{b}\notin k$ oraz $\sqrt{a^2-b}\in k$.

Zadanie 2. (Kaplansky) Niech G będzie grupą Galois wielomianu nierozkładalnego $x^4 + ax^2 + b \in \mathbf{Q}[x]$. Dowieść, że:

(1) jeśli b jest kwadratem w $\mathbf{Q}$, to $G \cong \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$

(2) jeśli b nie jest kwadratem w $\mathbf{Q}$, ale $b(a^2-b)$ jest kwadratem, to $G \cong \mathbf{Z}/4$

(3) jeśli ani b, ani $b(a^2 - b)$ nie są kwadratami w $\mathbf{Q}$, to $G \cong D_4$.

Zadanie 3. Niech $E = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz niech S oznacza podciało w E złożone z funkcji wymiernych symetrycznych. Dowieść, że

(1) $[E; S] = n$ oraz $Gal(E/S) \cong S_n$. **Wskazówka.** Pokazać, że E jest ciałem rozkładu nad S wieelomianu rozdzielczego $f(t) = \prod(t - x_i)$

(2) jeżeli G jest grupą złożoną z n elementów, to istnieje ciało $K \subset E$, takie, że $Gal(E/K) \cong G$.

Zadanie 4.

(1) Niech $F = \mathbf{Q}(\xi_3)$, $f(x) = (x^2 - 2)(x^3 - 2) \in \mathbf{Q}[x]$ oraz E oznacza ciało rozkładu $f(x)$ nad F. Dowieść, że $E = F(2^a)$ dla pewnego $a \in \mathbf{Q}$, obliczyć $[E : F]$ i pokazać, że E/F jest rozszerzeniem cyklicznym (to znaczy grupa Galois $G(E/F)$ jest cykliczna).

(2) Niech $p\neq q$ będą liczbami pierwszymi, $n = pq$, $F = \mathbf{Q}(\xi_n)$, $f(x) = (x^p - 2)(x^q - 2) \in \mathbf{Q}[x]$ oraz E oznacza ciało rozkładu $f(x)$ nad F. Dowieść, że E/F jest rozszerzeniem cyklicznym.

Zadanie 5. Niech $a, n \in \mathbf{N}$. Załóżmy, że wielomian $f(x) = x^n - a$ jest nierozkładalny w $\mathbf{Q}[x]$ i oznaczny przez E ciało rozkładu tego wielomianu. Dowieść, że G_f jest izomorficzna z normalizatorem $N_{S_n}(<\sigma>)$, gdzie $\sigma \in S_n$ jest pewnym cyklem długości n.

Zadanie 6. Niech $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbf{C}[x]$, $D{=}d^2{=} - 4q^3 - 27q^2$, niech $F{=}\mathbf{Q}(p, q)$ oraz $G{=}Gal(F(a, b, c)/F)$, gdzie a, b, $c \in \mathbf{C}$ są pierwiastkami wielomianu $f(x)$. Wyznaczyć:

(1) strukturę grupy G w zależności od d, w przypadku, gdy wielomian $f(x)$ rozkłada się w F

(2) strukturę grupy G w zależności od d, w przypadku, gdy wielomian $f(x)$ jest nierozkładalny w F, oraz znaleźć wszystkie ciała pośrednie pomiędzy F i $F(a, b, c)$, (rozpatrzyć oddzielnie przypadki $d \in F$ i $d \notin F$).

Zadanie 7. (*Dla $n \geqslant 5$ grupa A_n nie jest rozwiązalna*)
Dowieść, że grupa alternująca A_n jest generowana przez cykle (ijk) długości trzy. Ponieważ $(ijk) = (ij)(jk)$, zatem każdy cykl długości trzy można zapisać w S_n jako iloczyn dwóch elementów rzędu dwa, gdy $n \geqslant 3$. Przy użyciu dwóch dodatkowych liter l i m każdy cykl długości trzy (ijk) można zapisać w A_n jako iloczyn dwóch elementów rzędu dwa. Wywnioskować z tego, że dla $n \geqslant 5$, grupa A_n nie jest rozwiązalna. Dlaczego ten dowód nie działa dla $n \leqslant 4$?

Zadanie 8. Dowieść, że jeśli podgrupa $H \subset A_5$ zawiera cykl (123) oraz H działa przechodnio na zbiorze $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, to $H = A_5$.