Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Zestaw 2
Ćwiczenia 21 października 2024 (do Wykładu 2)

Zadanie 1. (*elementy algebraiczne*)
Dowieść, że:

(a) jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ są elementami algebraicznymi nad podciałem k, to $k[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]{=}k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$,

(b) jeśli K/k jest rozszerzeniem ciał, $a \in K$ oraz $g \in k[x]$ jest wielomianem stopnia $\geqslant 1$, a $b{=}g(a)$, to a jest elementem algebraicznym nad ciałem $k(b)$,

(c) jeśli $f \in k[x]$ jest wielomianem minimalnym elementu $\alpha \in K$ nad podciałem k oraz $b \in k$, to wyznacz wielomian minimalny elementu $\beta{=}\alpha{-}b$ nad k.

Zadanie 2. (*wielomiany minimalne i stopnie rozszerzeń*)

(a) Niech $f \in k[x]$ będzie wielomianem minimalnym elementu $\alpha \in K$ nad podciałem $k \subset K$, taki, że stopień $\deg f$ jest liczbą nieparzystą. Dowieść, że wtedy $k(\alpha){=}k(\alpha^2)$. Czy warunek na $\deg f$ jest konieczny ?

(b) Niech $K{=}\mathbf{Q}(\sqrt{2}{+}\sqrt{5})$. Obliczyć stopiueń rozszerzenia $[K{:}\mathbf{Q}]$ oraz podać bazę $\mathbf{Q}$-liniowej przestrzeni K.

(c) Znaleźć wielomian minimalny liczby algebraicznej $\sqrt{2}{+}\sqrt[3]{5}$ nad ciałem $\mathbf{Q}$.

Zadanie 3.

(a) Niech $A = \mathbf{Z}[i]$ oznacza pierścień liczb całkowitych Gaussa poznany na wykładzie z elementarnej teorii liczb. Niech p będzie liczbą pierwszą, a $\wp = (p) = pA$ niech będzie ideałem głównym pierścienia A generowanym przez p. Dowieść, że $\wp$ jest ideałem pierwszym w A, wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 3 \mod 4$.

Wskazówka. Z teorii liczb (tej elementarnej) wiadomo, że jeśli $p \equiv 1 \mod 4$, to -1 jest resztą kwadratową. Dla $p \equiv 3 \mod 4$ należy wykazać, że $x^2 + 1$ jest wielomianem nierozkładalnym w $\mathbf{F}_p$.

(b) *Trochę ogólniej.* Niech p będzie liczbą pierwszą, $d \in \mathbf{Z}$ liczbą, która nie jest kwadratem liczby całkowitej. W pierścieniu $\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{a{+}b\sqrt{d}: \quad a, b \in \mathbf{Z}\}$ rozważmy ideał główny $I = (p) = p\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$. Dowieść, że I jest ideałem pierwszym wtedy i tylko wtedy, gdy klasa d reszt modulo p nie jest kwadratem w ciele $\mathbf{F}_p$.

Zadanie 4.
Niech K/k będzie rozszerzeniem ciał oraz niech $\alpha, \beta \in K$ będą takie, że $[k(\alpha) : k] = m$ i $[k(\beta) : k] = n$. Dowieść, że $[k(\alpha, \beta) : k(\beta)] = m$, wtedy i tylko wtedy, gdy $[k(\alpha, \beta) : k(\alpha)] = n$. Przeformułować ten warunek w terminach wielomianów minimalnych elementu α nad ciałem k i nad ciałem $k(\beta)$.