Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Zestaw 3

Ćwiczenia 28 października 2024 (do Wykładu 2)

Zadanie 1.
Wykorzystaj kryterium Eisensteina i lemat Gaussa do dowodu nierozkładalności w $\mathbf{Q}[x]$ następujących wielomianów: (a) $2x^4 + 15x^2 + 10$, (b) $x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ oraz (c)] $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 7x^2 + 8x - 4$. **Wskazówka.** Wykonaj podstawienie $y = ax + b$ dla odpowiednio wybranych a i b, a następnie dobierz liczbę pierwszą p, dla której można zastosować kryterium Eisensteina.

Zadanie 2. Niech $\xi_n{=}\exp(2\pi i/n){\in}\mathbf{C}$ będzie prymitywnym pierwiastkiem stopnia n z jedynki i niech $\Phi_n(x){\in}\mathbf{Q}[x]$ będzie jego wielomianem minimalnym / $\mathbf{Q}$. (a) Obliczyć Φ_8, Φ_{12} i Φ_{18} oraz Φ_{25}. (b) Na wykładzie dowiedliśmy, że mamy: $\Phi_p(x){=}(x^p - 1)/(x - 1)$, o ile p jest liczbą pierwszą. Wzorując się na tym dowodzie sprawdzić, że $\Phi_{p^2}(x){=}(x^{p^2} - 1)/(x^p{-}1)$.

Zadanie 3. Dowieść, że wielomian $x^m + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbf{Q}[x]$, wtedy i tylko wtedy, gdy m jest potęgą dwójki.

Zadanie 4*
Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że jeśli k jest ciałem i $a{\in}\, k$, to wielomian $x^p{-}a$ jest nierozkładalny w $k[x]$ lub ma pierwiastek w k. **Wskazówka.** Jeśli $f{=}f_1 f_2$, to rozłożyć f_1 i f_2 na czynniki liniowe w większym ciele oraz rozważyć ich wyrazy wolne.

Zadanie 5.
Niech p będzie liczbą pierwszą,

$$c{=}\cos\frac{2\pi}{p}, \quad s{=}\sin\frac{2\pi}{p}, \quad \epsilon{=}c{+}is{=}\exp(\frac{2\pi i}{p}) \quad \text{oraz} \quad K{=}\mathbf{Q}(s,c).$$

Dowieść, że $[K{:}\mathbf{Q}]{=}\frac{p-1}{2}$. Ponieważ $c^2{+}s^2 = 1$, zatem ~~s jest kwadratem nad $\mathbf{Q}(c)$ i c jest kwadratem nad $\mathbf{Q}(s)$ oraz~~ $[K{:}\mathbf{Q}(s)]$, $[K{:}\mathbf{Q}(c)] \in \{1,2\}$. Rozstrzygnąć, które z tych przypadków zachodzą w zależności od liczby p.

Zadanie 6.
Niech k będzie ciałem. Dowieść, że:

(a) jeżeli $a, b{\in}k$ są takie, że a jest kwadratem w $k(\sqrt{b})$, to a lub ab jest kwadratem w k, (**Wskazówka.** Rozpisać $(c{+}d\sqrt{b})^2$)

(b) jeśli $a, b{\in}k$, b nie jest kwadratem w k, $K{=}k(\beta)$ dla $\beta^2{=}b$ i jeden z elementów $a{+}\beta$ lub $a{-}\beta$ jest kwadratem w K, to kwadratem jest także drugi z tych elementów. Wywnioskować z tego, że $c{=}a^2{-}b$ jest kwadratem w k,

(c) jeśli char k $\neq 2$, $a, b{\in}k$ i $K{=}k(\alpha,\beta)$ dla $\alpha^2{=}a$, $\beta^2{=}b$, oraz $\gamma{=}\alpha(\beta{+}1)$, to $K{=}k(\gamma)$. (**Wskazówka.** Wyrazić α i β za pomocą γ) Własność (a) pozwala rozstrzygnąć kiedy $[K{:}k]{=}1,2$ lub 4. Wyznaczyć wielomian minimalny elementu γ nad k w każdym z tych przypadków.