Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Zestaw 4

Ćwiczenia 4 listopada 2024 (do Wykładu 4)

Zadanie 1. (Liczby Liouville'a, 1844)
Niech α będzie liczbą algebraiczną nad $\mathbf{Q}$ stopnia d. (a) Pokazać, że istnieje wielomian $P \in \mathbf{Z}[X]$ taki, że $P(\alpha) = 0$ i $P'(\alpha) \neq 0$. (b) Za pomocą (a) dowieść, że istnieje liczba rzeczywista $c > 0$ taka, że dla każdej pary liczb całkowitych (p, q), gdzie $q \neq 0$, zachodzi nierówność $|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{c}{q^d}$. (c) Dowieść, że liczba rzeczywista $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ jest przestępna[1].

Zadanie 2. Niech K/k będzie rozszerzeniem ciał oraz niech $\alpha, \beta \in K$ będą takie, że $[k(\alpha) : k]=m$ i $[k(\beta) : k]=n$. Dowieść, że $[k(\alpha, \beta) : k(\beta)]=m$, wtedy i tylko wtedy, gdy $[k(\alpha, \beta) : k(\alpha)] = n$. Przeformułować ten warunek w terminach wielomianów minimalnych elementu α : nad ciałem k i nad ciałem $k(\beta)$.

Zadanie 3. Niech K/k będzie rozszerzeniem ciał stopnia n, a p ustaloną liczbą pierwszą, która nie dzieli liczby n. Dowieść, że dla $a \in k$ następujące dwa warunki są równoważne:

(a) a jest $p-$tą potęgą w ciele k

(b) a jest $p-$tą potęgą w ciele K.

Zadanie 4.
Niech char k $\neq 2$ i niech L/k będzie rozszerzeniem ciał stopnia 4. Dowieść, że następujące dwa warunki są równoważne:

(a) istnieje ciało pośrednie $k \subset K \subset L$

(b) $L = k(\alpha)$ dla pewnego elementu algebraicznego α, którego wielomian minimalny nad ciałem k jest postaci $f_\alpha = x^4 + ax^2 + b$.

Zadanie 5*

(a) Niech $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset R$. Dowieść, że istnieje homomorfizm ciał $\phi : k \to k$ taki, że $\phi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Czy ϕ jest funkcją ciągłą?

(b) Dowieść, że każdy homomorfizm ciał $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest identycznością. **Wskazówka.** Ponieważ z definicji $\phi(1) = 1$, to powtarzając argument z wykładu można wykazać, że ϕ obcięty do ciała $\mathbf{Q}$ jest identycznością. Dla wykazania ciągłości funkcji ϕ należy znaleźć (czysto) algebraiczny warunek pozwalający odróżniać liczby rzeczywiste dodatnie od liczb rzeczywistych ujemnych, taki że założenie $a > 0$ pociągnie nierówność $\phi(a) > 0$. **Uwaga.** Własność (b) homorfizmu ciała liczb rzeczywistych jest bardzo szczególna, ponieważ na przykład, istnieje nieprzeliczalnie wiele homomorfizmów ciał $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Czy potrafisz tego dowieść ?

---

[1] Liczby rzeczywiste, których przestępność można dowieść w ten sposób noszą nazwę liczb Liouville'a. Wiadomo, że zbiór liczb Liouville'a jest nieprzeliczalny i miary zero. Wiadomo także, że ani π ani e nie są liczbami Liouville'a.