Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Zestaw 5

Ćwiczenia 18 listopada 2024 (do Wykładu 5)

Zadanie 1.

Niech $\phi \in (0, \pi/2)$. Dowieść, że kąt o mierze łukowej ϕ można podzielić za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki na trzy równe części, wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $x^3 - 3x - 2\cos\phi$ jest rozkładalny w pierścieniu wielomianów $K[x]$, gdzie $K = \mathbf{Q}(\cos\phi)$.

Zadanie 2.

(1) Sprawdzić, że $\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 + x - 1$ i wykorzystać ten fakt do dowodu konstruowalności 5-cio kąta foremnego za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki. (2) Sprawdzić, że $\beta = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 + x^2 - 2x - 1$ i wykazać, że **nie można** skosntruować 7-mio kąta foremnego za pomocą cyrkla i linijki. (3) Wykazać, że nie można skosntruować 9-cio kąta foremnego za pomocą cyrkla i linijki. **Wskazówka.** Zamiast odwoływania się do twierdzenia Gaussa z wykładu 5, proszę przeprowadzić bezpośrednie dowody stwierdzeń: (1), (2) i (3).

Zadanie 3.

(1) Niech K będzie ciałem rozkładu wielomianu $x^4 - 2$ nad $\mathbf{Q}$ (to znaczy najmniejszym podciałem w $\mathbf{C}$, które zawiera wszystkie pierwiastki wielomianu $x^4 - 2$). Wyznaczyć stopień $[K:\mathbf{Q}]$ i bazę przestrzeni $\mathbf{Q}-$liniowej K.
(2) Niech K będzie ciałem rozkładu wielomianu $x^{12} - 1$ nad $\mathbf{Q}$. Wyznaczyć stopień $[K:\mathbf{Q}]$, bazę przestrzeni $\mathbf{Q}-$liniowej K oraz dowieść, że K jest także ciałem rozkładu wielomianu $(x^4 - 1)(x^3 - 1)$ nad $\mathbf{Q}$.

Zadanie 4. (Wielomiany cyklotomiczne)

Niech $\Phi_n(x) = \Pi_{1 \leqslant k < n,\, (k,n)=1}(x - \xi_n^k)$ będzie n-tym wielomianem cyklotomicznym, gdzie $\xi_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$.

(1) Dla $n \leqslant 12$ rozłożyć $x^n - 1$ na czynniki nierozkładalne w $\mathbf{Z}[x]$.

(2) Dowieść, że $\Phi_n(x) = \Pi_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(n/d)}$, gdzie $\mu(-)$ jest funkcją Möbusa taką, że $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^r$ jeżeli n jest iloczynem r różnych liczb pierwszych, i $\mu(n) = 0$ w pozostałych przypadkach. Rozpocząć od dowodu tożsamości:

$$0 = \sum_{d|n} \mu(d), \qquad n = \sum_{d|n} \phi(d), \qquad \phi(n) = \sum_{d|n} d\mu(\frac{n}{d}),$$

gdzie $\phi(n) = \#(\mathbf{Z}/n)^\times$ jest wartością funkcji Eulera na n. Obliczyć $\Phi_{30}(x)$ oraz $\Phi_{81}(x)$.

(3) Dowieść, że $\Phi_n(x) = x^{\phi(n)}\Phi_n(1/x)$ oraz, że współczynniki wielomianu $\Phi_n(x)$ spełniają równości: $a_k = a_{\phi(n)-k}$ dla $0 \leqslant k \leqslant \phi(n)$. Wywnioskować z tego, że wielomian $\Phi_n(x)$ jest całkowicie określony przez swoją klasę reszt w pierścieniu ilorazowym $\mathbf{Z}[x]/(x^{[\phi(n)/2]+1})$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a.

(4) Pokazać, że:

- $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$, gdzie $m = rad(n)$ jest iloczynem wszystkich, różnych dzielników pierwszych liczby n.
- $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x)$, jeżeli p nie dzieli n
- $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ dla $n > 1$, nieparzystego.

(5) Korzystając z powyższych własności wielomianów cyklotomicznych obliczyć raz jeszcze $\Phi_{30}(x)$, $\Phi_{81}(x)$ oraz wyznaczyć wielomian $\Phi_{105}(x)$.

(6)* Dowieść, że $\Phi_n \in \mathbf{Z}[x]$ oraz, że wielomian Φ_n jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbf{Q}[x]$.

Zadanie 5.

Niech $F_n = \mathbf{Q}(\xi_{2^{n+2}})$ będzie ciałem cyklotomicznym 2^{n+2}-pierwiastków z jedynki, gdzie $n \geqslant 0$ oraz niech $\alpha_n = \xi_{2^{n+2}} + \xi_{2^{n+2}}^{-1}$ i $F_n^+ = \mathbf{Q}(\alpha_n)$ (jest to tzw. *maksymalne ciało rzeczywiste zawarte w* F_n).

(a) Dowieść, że dla wszystkich $n \geqslant 0$, $[F_n : \mathbf{Q}] = 2^{n+1}$, $[F_n : F_n^+] = 2$, $[F_n^+ : \mathbf{Q}] = 2^n$ oraz $[F_{n+1}^+ : F_n^+] = 2$.

(b) Znaleźć równanie kwadratowe (w terminach α_n), które spełnia $\xi_{2^{n+2}}$ nad ciałem F_n^+.

(c) Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 0$ mamy $\alpha_{n+1}^2 = 2 + \alpha_n$ i w rezultacie:

$$\alpha_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots \sqrt{2}}}}} \quad (n \text{ razy})$$

- wyrażenie na (konstruowalny) pierwiastek stopnia 2^{n+2} z jedynki.