Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Zestaw 6

Ćwiczenia 2 grudnia 2024 (do Wykładów 6 i 7)

Zadanie 1.
Znaleźć stopień i bazę ciała rozkładu wielomianu $f \in K[x]$ nad ciałem K, gdy: (a) $K = \mathbf{Q}, f = (x^2-2)(x^2-5)$, (b) $K = \mathbf{Q}(i), f = (x^2-2)(x^2-3)$, (c) $K = \mathbf{Q}, f = x^4+1$, (c) $K = \mathbf{Q}, f = x^4-2$.

Zadanie 2.
Które z rozszerzeń K/k są normalne jeśli: (a) $k = \mathbf{Q}$, $K = \mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$, (b) $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $K = \mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$, (c) $k = \mathbf{Q}$, $K = \mathbf{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$, (d) $k = \mathbf{Q}(X)$, $K = \mathbf{Q}(X^3)$?

Zadanie 3.
Dowieść, że: (a) jeśli $[K:k] = 2$, to rozszerzenie ciał K/k jest normalne, (b) jeśli $f \in k[x]$ oraz $deg f = n$, a K jest ciałem rozkładu f nad k, to stopień $[K:k]$ dzieli $n!$, (c) jeśli $k \subset K \subset L$ jest wieżą ciał taką, że rozszerzenia K/k i L/K są normalne, to L/k **nie zawsze** jest rozszerzeniem normalnym. **Wskazówka.** Podaj odpowiedni przykład.

Zadanie 4.
Sprawdzić, że wielomian x^4+1 jest nierozkładalny w $\mathbf{Q}[x]$. Dowieść, że dla każdej liczby pierwszej p, redukcja modulo p wielomianu x^4+1 jest wielomianem rozkładalnym w $\mathbf{F}_p[x]$. Sprawdzić podobny fakt dla x^8+1. **Trudniejsze zadanie:** Wyznacz wszystkie wielomiany nierozkładalne z $\mathbf{Z}[x]$, które rozkładają się w $\mathbf{F}_p[x]$, po redukcji współczynników na każdej liczbie pierwszej p.

Zadanie 5*

(a) Niech $a, b \in k$ oraz $c = a^2 - b$. Załóżmy, że żaden z elementów: b, c, bc nie jest kwadratem w ciele k. Niech K będzie ciałem rozkładu wielomianu $f = (x^2-a)^2 - b$. Dowieść, że $[K:k] = 8$.

(b) Niech $a, b \in k$ i załóżmy, że wielomian $f = x^4 - 2ax^2 + b^2$ jest nierozkładalny w pierścieniu wielomianów $k[x]$. Dowieść, że jeśli $\alpha \in L$ jest pierwiastkiem wielomianu f w pewnym rozszerzeniu ciał L/k, to b/α jest pierwiastkiem wielomianu f. Wywnioskować z tego, że $K = k(\alpha)$ jest ciałem rozkładu wielomianu f nad k.