Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Ćwiczenia 9 grudnia 2024 (do Wykładu 8)

Zadanie 1. Niech p będzie liczbą pierwszą, a $\mathbf{F}_{p^n}$ ciałem p^n-elementowym, dla $n{\in}\mathbf{N}$.

(a) Dowieść, że $\mathbf{F}_{p^n} \subset \mathbf{F}_{p^m}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $n|m$.

(b) Niech $f{\in}\mathbf{F}_p[x]$ będzie wielomianem nierozkładalnym stopnia n. Dowieść, że $\mathbf{F}_p[x]/(f)$ jest ciałem p^n-elentowym izomorficznym z ciałem rozkładu wielomianu $x^{p^n}{-}x$ nad $\mathbf{F}_p$ oraz, że $f|(x^{p^n}{-}x)$. Ogólniej, niech $f{\in}\mathbf{F}_p[x]$ będzie wielomianem nierozkładalnym. Dowieść, że $f|(x^{p^n}{-}x)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\deg f|n$.

(c) Niech $\eta_p(n)$ oznacza liczbę wielomianów nierozkładalnych stopnia n z pierścienia $\mathbf{F}_p[x]$. Dowieść, że $\sum_{d|n} d\eta_p(n){=}p^n$ oraz $\eta_p(n){=}\frac{1}{n}\sum_{d|n} p^d\mu(\frac{n}{d})$, gdzie $\mu(n)$ jest funkcją Möbusa, tzn. $\mu(1){=}1$, $\mu(n){=}0$, jeśli n dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej, oraz $\mu(p_1p_2\dots p_k){=}(-1)^k$, jeśli p_i są różnymi liczbami pierwszymi.

(d) Obliczyć $\eta_p(n)$ dla $n{=}1,2,\dots,10$ oraz $\eta_p(q)$, jeśli q jest potęgą liczby p.

Zadanie 2^* Niech K/k będzie skończonym rozszerzeniem normalnym ciał i niech $f{\in}k[x]$ będzie wielomianem nierozkładalnym. Załóżmy, że w $K[x]$ mamy $f{=}g_1g_2\dots g_r$, gdzie wielomiany $g_i{\in}\ K[x]$ są nierozkładalne. Dowieść, że wszystkie wielomiany g_i są tego samego stopnia. **Wskazówka.** Niech K będzie ciałem rozkładu wielomianu $h{\in}k[x]$. Wykazać, że jeśli α jest pierwiastkiem wielomianu g_i, to $K(\alpha)$ jest ciałem rozkładu wielomianu h nad ciałem $k(\alpha)$.

Zadanie 3. (*pierścień liczb dualnych*)

(a) Niech A będzie pierscieniem przemiennym z jedynką oraz niech $B{=}A[\epsilon]$ będzie zdefiniowany w następujący sposób: B jest zbiorem par (a,b), gdzie $a,b{\in}A$, z dodawaniem po współrzędnych i mnożeniem zadanym wzorem $(a,b)(c,d){=}(ac,ad{+}bc)$. Dowieść, że B z tak określonymi działaniami jest pierścieniem przemiennym oraz, że istnieje $\epsilon{\in}B$, taki, że $\epsilon^2{=}0$ oraz każdy element z B można jednoznacznie zapisać w postaci $a{+}b\epsilon$, dla pewnych $a,b{\in}A$. **Wskazówka.** Porównaj B z pierścieniem ilorazowym $A[x]/(x^2)$.

(b) Niech k będzie dowolnym ciałem, $A{=}k[x]$ oraz niech B będzie pierścieniem z (a) utworzonym dla A. Dla $f{\in}k[x]$ zapisujemy $f(x{+}\epsilon){=}f{+}\delta(f)\epsilon{\in}B$. Sprawdzić, że w ten sposób definiujemy funkcję $k{-}$liniową $\delta : k[x] \longrightarrow k[x]$ taką, że $\delta(a){=}0$ dla $a{\in}k$ i $\delta(fg){=}f\delta(g){+}g\delta(f)$ dla $f,g{\in}k[x]$, zgodną z pochodną formalną wielomianów z wykładu 8.

Zadanie 4. (a) Dowieść, że wielomian $f(x){\in}k[x]$ stopnia n ma wielokrotny czynnik, wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany $f(x)$ oraz $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$ mają wspólny czynnik. co jest równoważne temu, że zbiór złożony z $2n{-}1$ wielomianów: f, xf, $\dots$, $x^{n-2}f$, f', $\dots$, $x^{n-1}f'$ jest liniowo zależny w przestrzeni wielomianów z $k[x]$ stopnia $\leqslant 2n-2$. (b) Obliczyć wyznaczniki:

$$\det\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b & 0 \\ 0 & 2 & b \end{vmatrix} \qquad \det\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3p & 2q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3p & 2q \\ 3 & 0 & 3p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3p \end{vmatrix}$$

i w ten sposób uzyskać wzory na wyróżniki wielomianów $x^2{+}bx{+}c$ i $x^3{+}3px{+}2q$.
(c) Uzupełnić dowód Lematu 8.5 o wyróżniku z wykładu 8 za pomocą (a) i metod z ALI.