Materiały do ćwiczeń prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Zestaw 9
Ćwiczenia 16 grudnia 2024 (do Wykładu 9)

Zadanie 1.
Niech k będzie ciałem charakterystyki różnej od 3, takim, że $f{=}x^3{-}3x{+}1$ jest wielomianem nierozkładalnym w $k[x]$. Niech $K{=}k(\alpha)$, gdzie $f(\alpha){=}0$. Dowieść, że f rozkłada się na czynniki liniowe w pierścieniu $K[x]$ i wywnioskować z tego, że $Gal(K/k){=}\mathbf{Z}/3$. **Wskazówka:** $f{=}(x{-}\alpha)g$ dla pewnego wielomianu kwadratowego z pierścienia $K[x]$. Skorzystać z równości $12{-}3\alpha^2{=}({-}4{+}\alpha{+}2\alpha^2)^2$ w ciele K.

Zadanie 2.

(a) Dowieść, że grupa Galois rozszerzenia ciał skończonych $\mathbf{F}_{p^n}/\mathbf{F}_p$ jest cykliczna rzędu n, a jej generatorem jest automorfizm Frobeniusa $Frob(\alpha){=}\alpha^p$.

(b) Obliczyć *grupę Galois wielomianu* $x^4{-}2$ nad $\mathbf{Q}$, tzn. grupę Galois $Gal(K/k)$, gdzie $k{=}\mathbf{Q}$ oraz K jest ciałem rozkładu $x^4{-}2$ nad k.

Zadanie 3. (Wielomiany Artina-Schreire'a $x^p - x + a$)
Niech p będzie liczbą pierwszą, niech $a \in \mathbf{F}_p$ oraz $K{=}\bar{\mathbf{F}}_p{=}\bigcup_{n>0} \mathbf{F}_{p^n}$ oznacza domknięcie algebraiczne ciała $\mathbf{F}_p$. Oznaczmy przez $f(x) = x^p - x + a$.

(a) Niech $\alpha \in K$ będzie pierwiastkiem wielomianu $f(x)$. Obliczyć pozostałe pierwiastki wielomianu $f(x)$.

(b) Dowieść, że $f(x)$ w pierścieniu $\mathbf{F}_p[x]$. rozkłada się na czynniki liniowe, albo jest nierozkładalny.

(c) Dowieść, że jeśli $a \in \mathbf{F}_p^\times$, to ciało rozkładu wielomianu $x^p - x + a$ nad $\mathbf{F}_p$ jest rozszerzeniem stopnia p ciała $\mathbf{F}_p$.

(d) Pokazać, że dla nieskończenie wielu $n \in \mathbf{Z}$ wielomian $x^p - x + n$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbf{Q}[x]$.

Zadanie 4.

(a) Niech $p \neq 2$ będzie liczbą pierwszą i niech $AGl_1(\mathbf{F}_p)$ oznacza zbiór funkcji afinicznych $\gamma_{i,j} : \mathbf{F}_p \longrightarrow \mathbf{F}_p$, gdzie $(i,j) \in \mathbf{F}_p^\times \times \mathbf{F_p}$ zadanych wzorami $\gamma_{i,j}(x) = ix + j$. Dowieść, że zbiór $AGl_1(\mathbf{F}_p)$ ze składaniem funkcji jest grupą, która jest izomorficzna z iloczynem półprostym grup $\mathbf{Z}/(p{-}1)$ i $\mathbf{Z}/p$.

(b) Dowieść, że stopień rozszerzenia $E/\mathbf{Q}$, gdzie E jest ciałem rozkładu wielomianu $x^p - 2$ nad $\mathbf{Q}$, wynosi $p(p-1)$.

(c) Dowieść, że przy oznaczeniach z (a) i (b), zachodzi izomorfizm grup $Gal(E/\mathbf{Q}) \cong AGl_1(\mathbf{F}_p)$.