Zadania do indywidualnego rozwiązania za dodatkowe punkty prof. Wojciech Gajda
Algebra II
Zima 2024/2025

Zasady:

- Z zadań można zdobyć co najwyżej 20 punktów

  (w sumie maksymalna liczba punktów z ćwiczeń to 220, ale 200 = 100% pkt).

- Rozwiązania wybranego podzbioru zadań należy przesłać w pliku PDF (spisane za pomocą LaTeXa) najpóźniej do terminu 2. kolokwium (27 stycznia) na adres mailowy *jgarnek (małpa) amu.edu.pl.*

- Zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. (5 pkt)
Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. Dowieść, że A jest ciałem, wtedy i tylko wtedy, gdy $A \neq 0$ oraz A ma tylko niewłaściwe ideały (0 i A).

Zadanie 2. (10 pkt)
Niech p będzie liczbą pierwszą, $d \in \mathbf{Z}$ liczbą, która nie jest kwadratem liczby całkowitej. W pierścieniu $\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d}: \quad a, b \in \mathbf{Z}\}$ rozważmy ideał główny $I = (p) = p\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$. Dowieść, że I jest ideałem pierwszym wtedy i tylko wtedy, gdy klasa d reszt modulo p nie jest kwadratem w ciele $\mathbf{F}_p$.

Zadanie 3. (5 pkt)
Niech K/k będzie rozszerzeniem ciał oraz niech $\alpha, \beta \in K$ będą takie, że $[k(\alpha) : k] = m$ i $[k(\beta) : k] = n$. Dowieść, że $[k(\alpha, \beta) : k(\beta)] = m$, wtedy i tylko wtedy, gdy $[k(\alpha, \beta) : k(\alpha)] = n$. Przeformułować ten warunek w terminach wielomianów minimalnych elementu α nad ciałem k i nad ciałem $k(\beta)$.

Zadanie 4. (10 pkt)
Niech k będzie ciałem. Dowieść, że:

(a) jeżeli $a, b \in k$ są takie, że a jest kwadratem w $k(\sqrt{b})$, to a lub ab jest kwadratem w k, (**Wskazówka.** Rozpisać $(c+d\sqrt{b})^2$)

(b) jeśli $a, b \in k$, b nie jest kwadratem w k, $K=k(\beta)$ dla $\beta^2=b$ i jeden z elementów $a+\beta$ lub $a-\beta$ jest kwadratem w K, to kwadratem jest także drugi z tych elementów. Wywnioskować z tego, że $c=a^2-b$ jest kwadratem w k,

(c) jeśli char $k \neq 2$, $a, b \in k$ i $K=k(\alpha, \beta)$ dla $\alpha^2=a$, $\beta^2=b$, oraz $\gamma=\alpha(\beta+1)$, to $K=k(\gamma)$. (**Wskazówka.** Wyrazić α i β za pomocą γ). Własność (a) pozwala rozstrzygnąć, kiedy $[K{:}k]=1, 2$ lub 4. Wyznaczyć wielomian minimalny elementu γ nad k w każdym z tych przypadków.

Zadanie 5. (10 pkt) (Liczby Liouville'a, 1844)
Niech α będzie liczbą algebraiczną nad $\mathbf{Q}$ stopnia d.

(a) Pokaż, że istnieje wielomian $P \in \mathbf{Z}[X]$ taki, że $P(\alpha) = 0$ i $P'(\alpha) \neq 0$.

(b) Za pomocą (a) dowiedź, że istnieje liczba rzeczywista $c > 0$ taka, że dla każdej pary liczb całkowitych (p, q), gdzie $q \neq 0$, zachodzi nierówność

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{c}{q^d}.$$

(c) Udowodnij, że liczba rzeczywista $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ jest przestępna[1].

Zadanie 6. (10 pkt)

(a) Niech $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$. Udowodnij, że istnieje homomorfizm ciał $\phi : k \to k$ taki, że $\phi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Czy ϕ jest funkcją ciągłą?

(b) Udowodnij, że każdy homomorfizm ciał $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest identycznością. **Wskazówka.** Ponieważ $\phi(1) = 1$, można wykazać, że ϕ ograniczona do $\mathbb{Q}$ jest identycznością. Aby wykazać ciągłość ϕ, znajdź algebraiczny warunek pozwalający odróżniać liczby rzeczywiste dodatnie od ujemnych, taki że założenie $a > 0$ pociąga $\phi(a) > 0$. **Uwaga.** Własność (b) jest szczególna, ponieważ istnieje nieprzeliczalnie wiele homomorfizmów ciał $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Czy potrafisz to udowodnić?

Zadanie 7. (10 pkt)

(1) Udowodnij, że $\Phi_n(x) = x^{\phi(n)}\Phi_n(1/x)$ oraz, że współczynniki wielomianu $\Phi_n(x)$ spełniają równości $a_k = a_{\phi(n)-k}$ dla $0 \leqslant k \leqslant \phi(n)$. Wywnioskuj z tego, że $\Phi_n(x)$ jest całkowicie określony przez swoją klasę reszt w pierścieniu ilorazowym $\mathbf{Z}[x]/(x^{[\phi(n)/2]+1})$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a.

(2) Pokaż, że:

- $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$, gdzie $m = \mathrm{rad}(n)$ jest iloczynem wszystkich różnych dzielników pierwszych liczby n,
- $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x)$, jeśli p nie dzieli n,
- $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ dla $n > 1$, nieparzystego.

Zadanie 8. (10 pkt)
Sprawdź, że wielomian $x^4 + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbf{Q}[x]$. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p redukcja modulo p wielomianu $x^4 + 1$ jest wielomianem rozkładalnym w $\mathbf{F}_p[x]$. Sprawdź podobny fakt dla $x^8 + 1$.

Zadanie 9. (10 pkt)

(a) Niech $a, b \in k$ oraz $c = a^2 - b$. Załóżmy, że żaden z elementów b, c, bc nie jest kwadratem w ciele k. Niech K będzie ciałem rozkładu wielomianu $f = (x^2 - a)^2 - b$. Udowodnij, że $[K : k] = 8$.

(b) Niech $a, b \in k$ i załóżmy, że wielomian $f = x^4 - 2ax^2 + b^2$ jest nierozkładalny w pierścieniu wielomianów $k[x]$. Udowodnij, że jeśli $\alpha \in L$ jest pierwiastkiem wielomianu f w pewnym rozszerzeniu ciał L/k, to b/α jest pierwiastkiem f. Wywnioskuj z tego, że $K = k(\alpha)$ jest ciałem rozkładu f nad k.

Zadanie 10. (10 pkt) (Pierścień liczb dualnych)

[1] Liczby rzeczywiste, których przestępność można dowieść w ten sposób, noszą nazwę liczb Liouville'a. Wiadomo, że zbiór liczb Liouville'a jest nieprzeliczalny i miary zero. Wiadomo także, że ani π, ani e nie są liczbami Liouville'a.

(a) Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką oraz niech $B = A[\epsilon]$ będzie zdefiniowany następująco: B jest zbiorem par (a, b), gdzie $a, b \in A$, z dodawaniem po współrzędnych i mnożeniem zadanym wzorem $(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc)$. Udowodnij, że B z tak określonymi działaniami jest pierścieniem przemiennym oraz że istnieje $\epsilon \in B$ taki, że $\epsilon^2 = 0$ oraz każdy element z B można jednoznacznie zapisać w postaci $a + b\epsilon$ dla pewnych $a, b \in A$. **Wskazówka.** Porównaj B z pierścieniem ilorazowym $A[x]/(x^2)$.

(b) Niech k będzie dowolnym ciałem, $A = k[x]$ oraz niech B będzie pierścieniem z (a) utworzonym dla A. Dla $f \in k[x]$ zapisujemy $f(x+\epsilon) = f+\delta(f)\epsilon \in B$. Sprawdź, że w ten sposób definiujemy funkcję k-liniową $\delta : k[x] \to k[x]$ taką, że $\delta(a) = 0$ dla $a \in k$ i $\delta(fg) = f\delta(g)+g\delta(f)$ dla $f, g \in k[x]$, zgodną z pochodną formalną wielomianów z wykładu 8.

Zadanie 11. (10 pkt)

(a) Niech $p \neq 2$ będzie liczbą pierwszą i niech $AGl_1(\mathbf{F}_p)$ oznacza zbiór funkcji afinicznych $\gamma_{i,j} : \mathbf{F}_p \to \mathbf{F}_p$, gdzie $(i, j) \in \mathbf{F}_p^\times \times \mathbf{F}_p$, zadanych wzorami $\gamma_{i,j}(x) = ix + j$. Udowodnij, że zbiór $AGl_1(\mathbf{F}_p)$ ze składaniem funkcji jest grupą, która jest izomorficzna z iloczynem półprostym grup $\mathbf{Z}/(p-1)$ i $\mathbf{Z}/p$.

(b) Udowodnij, że stopień rozszerzenia $E/\mathbf{Q}$, gdzie E jest ciałem rozkładu wielomianu $x^p - 2$ nad $\mathbf{Q}$, wynosi $p(p-1)$.

(c) Udowodnij, że przy oznaczeniach z (a) i (b), zachodzi izomorfizm grup $Gal(E/\mathbf{Q}) \cong AGl_1(\mathbf{F}_p)$.

Wesołych Świąt