MACIERZE I ICH ZASTOSOWANIA

PASJONACI MATEMATYKI

1. Macierze i podstawowe działania

Macierz $m \times n$ to tablica liczb mająca m wierszy i n kolumn. Zbiór: $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (macierze o współczynnikach rzeczywistych; podobnie o współczynnikach wymiernych). Macierze $1 \times n$ (jedna kolumna) to wektory. Operacje:

• **dodawanie:** (macierze tego samego wymiaru)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+(-3) & -1+4 & 3+(-1) \\ -4+2 & 0+(-5) & 5+0 \\ 6+(-6) & -2+1 & -3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementem neutralnym dodawania w $M_{n,m}(\mathbb{R})$ jest macierz zerowa $0_{n,m}$.

• **mnożenie przez liczbę (skalar):**

$$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 6 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-3) \end{bmatrix}$$

• **mnożenie macierzy:** uwaga:

$$A \cdot B \neq \begin{bmatrix} 2 \cdot (-3) & -1 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \\ -4 \cdot 2 & 0 \cdot (-5) & 5 \cdot 0 \\ 6 \cdot (-6) & -2 \cdot 1 & -3 \cdot 3 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, to $A \cdot B \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ oraz mnożenie odbywa się zgodnie z przykładem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2+2+9 & -3-10+6 & 1+0-12 & 4+4+3 \\ 8+0-3 & -12+0-2 & 4+0+4 & 16+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -7 & -11 & 11 \\ 5 & -14 & 8 & 15. \end{bmatrix}$$

Elementem neutralnym mnożenia (w $M_{n,n}(\mathbb{R})$) jest **macierz identycznościowa:**

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Dlaczego tak? Z każdą macierzą $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ można związać funkcję:

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f_A(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(funkcje takie nazywamy **liniowymi** – uogólniają one funkcję $f(x) = ax$). Okazuje się, że $f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$. Przykład: $f_{I_2}(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (tzn. f_{I_2} to identyczność).

- **transpozycja:** $A = [a_{ij}]$, $A^t = [a_{ji}]$.

2. Macierze odwrotne i wyznaczniki

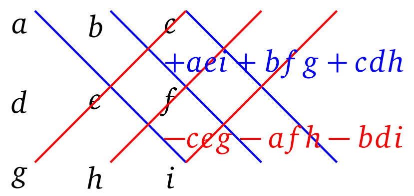
Pytanie: dla jakich macierzy $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ istnieje macierz B taka, że $A \cdot B = I_n$ (**macierz odwrotna**)?

Wyznacznik macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$**:**

- 1×1: $\det[a] = a$,
- 2×2: $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$,
- 3×3:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Jak zapamiętać?



- $n \times n$:
  (A) zamieniając miejscami dwa wiersze (lub kolumny) zmieniamy znak na przeciwny,
  (B) wartość wyznacznika nie zmienia się po odjęciu wielokrotności kolumny (wiersza) od innej kolumny (wiersza),

(C)

$$\det \begin{bmatrix} a & \text{coś} \\ 0 & \dots \\ \vdots & A \\ 0 & \dots \end{bmatrix} = a \cdot \det A.$$

Przykład:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{(A)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{(B)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(C)}{=} - \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -(12-2-2-1+8+6) = -21.$$

Własności:

- wyznacznik macierzy górnotrójkątnej to iloczyn elementów na przekątnej,
  D: (C) wielokrotnie.
- $\det I_n = 1$,
  D: poprzednia własność.
- $\det A = \det A^t$,
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$,
- $\det[av_1|...|v_n] = a \cdot \det[v_1|\dots|v_n]$,
- A ma macierz odwrotną wtw. gdy $\det A \neq 0$.
  D: ($\Rightarrow$) $A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow 1 = \det I_n = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0$.
  ($\Leftarrow$) Wzór na macierz odwrotną (zawierający $\frac{1}{\det A}$).

Interpretacja geometryczna wyznacznika:
$|\det A|$ = objętość równoległościanu $f_A([1,0] \times [0,1])$.

Rozważmy liniowy układ równań o n zmiennych i n równaniach:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{cases} \qquad (*)$$

Obserwacja: $(*)$ jest równoważny z $Ax = b$, gdzie

$$A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie (o rozwiązaniach URL): jeżeli $\det A \neq 0$, to $Ax = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnego $b \in \mathbb{R}^n$.
Dowód: $x = A^{-1}b$.

Uwaga: wzory Cramera – rozwiązania układu równań.

3. Diagonalizacja

Motywacja: jak szybko potęgować macierze?
$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)^k = \mathrm{diag}(a_1^k, \ldots, a_n^k)$
Jeżeli $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ jest macierzą diagonalną, to $A \cdot e_i = a_i \cdot e_i$. Chcemy to uogólnić!

Niech $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Jeżeli

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \qquad \text{dla } v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

to mówimy, że λ jest **wartością własną** macierzy A, zaś v jest **wektorem własnym**.

Twierdzenie (diagonalizacja):
(1) Wartości własne macierzy spełniają $\det(\lambda I_n - A) = 0$.
(2) Niech $v_1, \ldots, v_n$ – wektory własne dla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, zaś $P := [v_1 | \ldots | v_n] \in M_n(\mathbb{R})$. Jeżeli P jest odwracalna, to:

$$A = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot P^{-1}, \qquad A^k = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) \cdot P^{-1}.$$

Dowód.
(1) $Av = \lambda v \Rightarrow (\lambda I_n - A) \cdot v = 0 \Rightarrow$ (twierdzenie o URL) $\det(\lambda I_n - A) = 0$.
(2) Mamy:

$$AP = [Av_1 | \ldots | Av_n] = [\lambda_1 v_1 | \ldots | \lambda_n v_n] = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

□

Uwaga: nie każdą macierz można zdiagonalizować – nie zawsze znajdziemy n niezależnych wektorów własnych (tak, by macierz P była odwracalna)! Kiedy można? Np. gdy znajdziemy n **różnych** wartości własnych!

Przykład: Rozważmy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Znalezienie wartości własnych. Rozwiązujemy równanie charakterystyczne:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 6)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6$$

2. Znalezienie wektorów własnych. Dla $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daje to równanie $x_2 = -3x_1$, więc wektor własny to:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dla $\lambda_2 = 6$:

$$(A-6I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daje to równanie $x_2 = 2x_1$, więc wektor własny to:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Konstrukcja macierzy diagonalizującej. Macierz wektorów własnych:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalna:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Spełniona jest równość:

$$A = PDP^{-1}$$