MACIERZE I ICH ZASTOSOWANIA
Pasjonaci matematyki

dr Jędrzej Garnek
mail: jgarnek amu.edu.pl
strona: jgarnek.faculty.wmi.amu.edu.pl (Dydaktyka ⇒ Pasjonaci Matematyki)

Mnożenie macierzy i inne podstawowe operacje

1. Oblicz iloczyn macierzy:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$,

   (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Wykaż, że długość wektora $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (tzn. wektora łączącego punkty $(0,0,0)$ oraz (x,y,z)) wynosi $\sqrt{v^T \cdot v}$.

   (*Wskazówka: jakie wymiary ma macierz $v^T \cdot v$? Co może oznaczać pierwiastek z takiej macierzy? Jeżeli masz problem, zrób to samo dla $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$*)

3. Rozważmy zbiór macierzy:
$$\mathcal{C} := \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}.\}$$

   (a) Wykaż, że każdą macierz $A \in \mathcal{C}$ można zapisać w postaci $aI_2 + bJ$, gdzie $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Oblicz J^2.

   (c) Oblicz iloczyn macierzy: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$.

   (d) Przypomnij sobie, czym są liczby zespolone. W jaki sposób zdefiniować je za pomocą zbioru $\mathcal{C}$?

4. Niech dla dowolnego $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$:
$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

   (a) Oblicz $\det A_\alpha$.

   (b) Wykaż, że $A_{\alpha+\beta} = A_\alpha \cdot A_\beta$.

   (c) Narysuj $A_{45^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $A_{45^\circ} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Następnie, zastanów się jak narysować $A_\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $A_\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Jak zinterpretować funkcję:
$$g_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad g_\alpha(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}?$$

5. Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ określmy funkcję φ_A wzorem $\frac{ax+b}{cx+d}$.

   (a) Wykaż, że $\varphi_A(\varphi_B(x)) = \varphi_{A \cdot B}(x)$,

   (b) Wykaż, że φ_A jest funkcją stałą wtedy i tylko wtedy gdy $\det A = 0$.

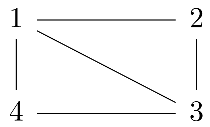
   (c) Znajdź φ_{aI_2} dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

   (d) Niech $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $f(0) \neq 0$. Niech $F(x) = f^{(N)}(x)$ (N - ustalona liczba całkowita, $n \geqslant 3$). Udowodnij, że jeśli $F(0) = 0$, to $F(x) = x$ dla wszystkich x, dla których funkcja F jest określona.

   Wskazówka: niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$. Wykaż, że $cb_n = bc_n$ oraz $ba_n + db_n = ab_n + bd_n$ dla każdego n przez indukcję.

6. Macierz incydencji grafu G mającego wierzchołki $1, \ldots, n$ to:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & G \text{ zawiera krawędź między } i \text{ oraz } j, \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

(a) Wyznacz macierz incydencji A dla grafu:



(b) Oblicz A^2 oraz A^3.

(c) *Niech G będzie dowolnym grafem, zaś A jego macierzą incydencji. Wyraz (i, j) w macierzy A^d odpowiada liczbie ścieżek długości d między wierzchołkami i oraz j.* – Sprawdź, że to stwierdzenie zachodzi dla grafu z podpunktu (a) oraz $d \in \{2, 3\}$, a następnie zastanów się jak je wykazać (najlepiej indukcyjnie).

Wskazówka: jeżeli $A^d = [a_{ij}^{(d)}]_{i,j} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, to jak zinterpretować liczbę $a_{i1}^{(d)} a_{1j}^{(1)} + a_{i2}^{(d)} a_{2j}^{(1)} + \ldots + a_{in}^{(d)} a_{nj}^{(1)}$?

7. Niech $\mathbb{R}[x]_n$ oznacza zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia mniejszego od n. Dla wielomianu $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{R}[x]_n$ określamy jego wektor jako:

$$v(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Znajdź macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ taką, że $A \cdot v(P) = v(P')$ dla dowolnego $P \in \mathbb{R}[x]_n$.

8. (a) Przeczytaj, czym jest ciąg Fibonacciego i oblicz kilka pierwszych wyrazów.

(b) Wykaż, że $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wywnioskuj, że $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Wykaż, że $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$. Wywnioskuj, że $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, korzystając z własności wyznacznika.

(d) Znajdź diagonalizację macierzy A.

(e) Jak z podpunktów (b) oraz (d) znaleźć wzór jawny na F_n?

9. Ciągi a_n, b_n zadane są przez warunki początkowe $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ oraz

$$\begin{cases} a_{n+1} = -5a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 6b_n - 9a_n \end{cases}.$$

(a) Oblicz $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$.

(b) Znajdź macierz $A \in M_{2,2}(\mathbb{Z})$ taką, że $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$.

(c) Znajdź diagonalizację macierzy A. Korzystając z tego, znajdź wzór jawny ciągów a_n, b_n.

10. Załóżmy, że:

- Prawdopodobieństwo, że po dniu deszczowym nastąpi dzień deszczowy wynosi $\frac{1}{4}$.
- Prawdopodobieństwo, że po dniu słonecznym nastąpi dzień słoneczny wynosi $\frac{1}{3}$.

Niech

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(a) Oznaczmy przez p_n prawdopodobieństwo, że za n dni będzie padało, zakładając że dzisiaj jest dzień deszczowy. Podobnie oznaczmy przez q_n prawdopodobieństwo, że za n dni będzie słonecznie, zakładając że dzisiaj jest słonecznie. Wykaż, że

$$A^n = \begin{bmatrix} p_n & 1 - q_n \\ 1 - p_n & q_n \end{bmatrix}$$

(*Wskazówka: jeżeli masz z tym problem, spróbuj najpierw policzyć p_2, q_2, p_3, q_3 itd*)

(b) Znajdź diagonalizację macierzy A.

Wskazówka:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Wykaż, że średnio $8/17$ dni jest deszczowe, zaś $9/17$ – słoneczne.
(*Wskazówka: oblicz $\lim_{n\to\infty} A^n$, korzystając z diagonalizacji A.*)

(d) Jak zinterpretować fakt, że $\begin{bmatrix} \frac{8}{17} \\ \frac{9}{17} \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym dla A?

Wyznaczniki, macierze odwrotne

1. Oblicz wyznacznik podanej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Oblicz wyznacznik macierzy $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$$

3. Sprawdź, że macierz odwrotna do macierzy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dana jest wzorem:

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4. (a) Wykaż, że

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1})$$

   (iloczyn składa się ze wszystkich czynników postaci $x_j - x_i$ dla $i < j$). W razie problemów, zacznij od przypadku 3×3 lub 4×4.

   (b) Wykaż, korzystając z (a), że dla przez dowolne $n+1$ punktów o różnych odciętych przechodzi dokładnie jeden wielomian stopnia n.

   (*np. przez dowolne* 2 *punkty przechodzi dokładnie* 1 *funkcja liniowa; przez dowolne* 3 *– dokładnie jedna funkcja kwadratowa...*)

5. (a) Znajdź dowolną macierz $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ taką, że $A \neq 0_2$, ale $A^k = 0_2$ dla pewnej liczby $k > 1$.

   (b) Wykaż, że jeżeli $A \in M_n(\mathbb{R})$ oraz $A^k = 0_n$, to $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + \ldots + A^{k-1}$.

Wartości własne i diagonalizacja

1. Znajdź wartości własne, wektory własne i diagonalizację podanej macierzy, jeżeli istnieje.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Niech $P \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem. Wykaż, że jeżeli $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, to $P(\lambda)$ jest wartością własną macierzy $P(A)$.

   (*Uwaga: jeżeli* $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, *to* $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$)

3. Znajdź wszystkie wektory własne dla operatora $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ dla dowolnej wartości własnej $\lambda \in \mathbb{R}$. ($C^\infty(\mathbb{R})$ oznacza tu zbiór funkcji, które mają wszystkie pochodne ciągłe)

4. Wykaż, że jeżeli $A \in M_n(\mathbb{Z}/p)$ jest diagonalizowalna i ma wszystkie wartości własne w $\mathbb{Z}/p$, to $A^p = A$.

5. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Oblicz $A^T A$.

   (b) Znajdź wartości własne A.

   (c) Wykaż, że jeżeli $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^T A = I_n$, to wszystkie rzeczywiste wartości własne A są równe ± 1.

6. Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierzy A.

   (a) Wykaż, że $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

   (*Jeżeli nie masz innego pomysłu, możesz założyć że A jest diagonalizowalna.*)

   (b) Wykaż, że $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

   ($\operatorname{tr} A$ *to ślad macierzy, czyli suma wartości na przekątnej. Jeżeli nie masz innego pomysłu, możesz założyć że* A *jest diagonalizowalna i skorzystać ze wzoru* $\operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(CB)$)