SEMINARIUM Z FORM MODULARNYCH I TOPOLOGII

SEMESTR LETNI 2025

Seminarium będzie oparte na książce *Manifolds and Modular Forms*, autorstwa F. Hirzebrucha, T. Bergera i R. Junga ([H1]). Centralnym dla tej książki pojęciem jest **genus ciągu multyplikatywnego**, który jest pewnym niezmiennikiem rozmaitości (rozpatrywanych z dokładnością do kobordyzmu). Źródłem ciekawych genusów są szeregi formalne (przykładowo pochodzące od form modularnych). Znaczenie genusów polega m.in. na ich bliskich związkach z indeksami pewnych operatorów różniczkowych i z twierdzeniem Atiyaha–Singera o indeksie. Twierdzenie to jest jednym z najważniejszych wyników matematyki XX wieku, łączącym geometrię różniczkową, analizę i topologię. Podaje ono wzoru ogólny na indeks operatorów różniczkowych eliptycznych na zwartej rozmaitości przy użyciu topologicznych danych rozmaitości i symbolu operatora. Szczególnymi przypadkami tego twierdzenia są twierdzenie Cherna–Gaussa–Bonneta oraz twierdzenie Riemanna–Rocha. Plan seminarium będzie luźno bazował na podobnym seminarium, które odbyło się na naszym wydziale 10 lat wcześniej. Podane treści wykładów są luźną sugestią – przewidujemy, że części materiału nie uda się omówić tak dokładnie.

- **Wykłady 1. i 2. Crash-course z topologii algebraicznej i różniczkowej.** Wprowadzić pokrótce następujące pojęcia: rozmaitość różniczkowa orientowalna, wiązka wektorowa, wiązka styczna, homologia/kohomologia symplicjalna i singularna, cup product, pushforward, pullback na kohomologii, dualność Poincarego, klasa fundamentalna rozmaitości. Można skorzystać np. z [Ha].
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykład 3. Kobordyzmy i klasy charakterystyczne - (rozdziały 1.1-1.5)** Wprowadzimy klasy charakterystyczne Cherna i Pontriagina wiązek wektorowych - aksjomatycznie jak w rozdziale 1.2 - posługując się przy tym książką Milnora i Stascheffa. Należy omówić obliczenie klas rzutowej przestrzeni kwaternionowej z twierdzenia Hirzebrucha ze strony 5, a także dowody twierdzenia Borela-Hirzebrucha ze strony 10 i 12 (proszę omówić zasadę rozkładu wiązki na sumę liniowych z rozdziału 4.4 - bez dowodu). Wykład powinien rozpocząć się od bardzo zwięzłego wprowadzenia pierścienia kobordyzmów $\bigoplus \Omega^n$.
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykład 4. Genus i ciągi multyplikatywne - (rozdziały 1.6-1.8)** Najważniejsze w tym wykładzie to: definicja homomorfizmu zespolonego genusu (ze strony 17) oraz prowadzące do niej lematy oparte na rachunkach na szeregach formalnych. Szczególną uwagę proszę zwrócić na przykłady ze stron: 16, 17 i 20. Należy omówić dowody lematów ze stron: 14, 16 i 19.
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykłady 5-6. Crash-course z form modularnych. Konstrukcja genusu zepolonego funkcji - (rozdziały 2.1-2.4)**
  Zdefiniować i podać przykłady form modularnych i podgrup kongruencyjnych (np. na podstawie książki [DS] lub [H1, Appendix 1]). Opowiedzieć o theta-szeregach i formach Eisensteina, pierścieniu funkcji eliptycznych, funkcji $\wp$-Weierstrassa i ich związkach z krzywymi eliptycznymi. Następnie należy przeprowadzić dowód twierdzenia ze strony 26. Jeżeli pozostanie czasu, zakończymy krótkim omówieniem formy długości łuku lemniskaty Fagnano z rozdziału 2.3, i wzoru na dodawanie z 2.4.
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykład 7. Grupy formalne i uniwersalny genus eliptyczny - (rozdziały 3.1, 3.2 i także 4.1, 4.2)**
  Po wprowadzeniu grupy formalnej związanej z wartością genusu na sumie klas kohomologii (lemat ze strony 37), należy dowieść stwierdzenia ze str. 39 i trzy wynikające z niego wnioski. Kluczową rolę w tym rozdziale i w 4.1 pełnią hiperpowierzchnie Milnora H_{ij}. Wykładowca powinien naszkicować dowody twierdzeń Borela-Hirzebrucha i Thoma z rozdziału 4.1 oraz wniosku, który mówi, że $\mathbb{P}^2$ i $H_{2,2k+1}$, dla $k > 1$, stanowią ciąg bazowy. Na zakończenie proszę przeprowadzić dowód algebraicznego stwierdzenia ze strony 46 z rozdziału 4.2.
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykład 8. Własności multyplikatywności genusów na wiązkach włóknistych - (rozdziały 4.3-4.6)**
  Rozpocząć od omówienia zasady rozkładu wiązek (zastosowanie ciągu spektralnego Leray'a). Następnie należy wprowadzić genusy dokładnie mutyplikatywne i przeprowadzić dowód Twierdzenia ze strony 51 oraz Wniosku z tego twierdzenia. W drugiej części wykładu skoncentrujemy się na Propositions ze strony 52, Corollary oraz Example ze strony 55. własności multyplikatywności L-genusu i genusu eliptycznego. Należy przedyskutować dowody Propositions ze strony 52, Corollary oraz Example ze str. 55.
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykład 9. Twierdzenie o Indeksie - (rozdziały 5.1-5.5)**
  To powinien być wykład o twierdzeniu o indeksie Atiyah-Singera dostępny dla wszystkich. Proszę nie omawiać dowodu tego twierdzenia, ale skoncentrować się na przykładach zastosowań dla kompleksu de Rhama, kompleksu Dolbeaut i wzorów na sygnaturę rozmaitości.
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykład 10. G-twierdzenie o Indeksie - (rozdziały 5.6-5.8)**
  Na początek omawiamy niezmienniczą wersję twierdzenia o indeksie, następnie zastosowania dla działań $G = S^1$ z izolowanymi punktami stałymi.
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykład 11. Niezmiennicze sygnatury i formy modularne - (rozdziały 6.1-6.2)**
  Ostatnie trzy wykłady stanowią kulminację naszego seminarium w tym semestrze. Wprowadzamy (za E.Wittenem) sygnaturę rozmaitości względem wiązek liniowych i względem przestrzeni wolnych pętli. Przeprowadzić dowody Twierdzenia ze strony 75, Wniosku z 76 i Twierdzenia ze strony 77. Należy omówić przykłady genusów eliptycznych ze stron 78-80, które dają formy modularne względem grup Heckego poziomu 2. Zakończyć definicją skręconego $\widehat{A}$-genusa i przykładem dla sfery S^{2k} ze strony 81.
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykład 12. Genus Wittena - (rozdział 6.3)**
  Dowieść twierdzenia Zagiera (Propositions - ze stron 83 i 85) oraz omówić dwa bardzo ważne przykłady: jeden o pewnej rozmaitści 24-wymiarowej, na której działa gładko grupa Monster, i drugi o całkowitych przecięciach - strony 86-88.
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

- **Wykład 13. Sfery egzotyczne (rozdziały 6.4 i 6.5)**
  Ten wykład poświęcamy omówieniu własności i konstrukcji rozmaitości Milnora-Kerveire'a [KM], których sygnatura wyraża się za pomocą wartości funkcji zeta Riemanna (dokładniej - licznika podzielonych liczb Bernoulliego). Opis konstrukcji tych rozmaitości zostanie rozszerzony o material z artykułów F.Hirzebrucha [H2] i W.Lücka [L]. Rozmaitość V^{4k-1} generuje grupę bP_{4k} klas dyfeomorfizmów sfer egzotycznych, które są brzegami paralelizowalnych rozmaitósci orientowalnych, zwartych. Hipotetycznie rzecz ujmując, klasy algebraicznego kobordyzmu rozmaitości V^{4k-1} dają nietrywialne elementy torsyjne w grupach K-teorii pierścienia liczb całkowitych, które generują. Istnienie takich generatorów przewiduje klasyczna hipoteza teorii liczb - hipoteza Iwasawy o grupach klas ciał cyklotomicznych, patrz [G].
  Planowana data: ???, **wykładowca:** ???

Literatura

[DS] F. Diamond, J. Shurman. A First Course in Modular Forms. Springer, 2005.
[G] W. Gajda: On K. (Z) and classical conjectures in the arithmetic of cyclotomic fields, Contem. mathematics of the AMS, 349 (2004), 217-237.
[Ha] A. Hatcher, Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
[H1] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung: Manifolds and Modular Forms, Vieweg Verlag, 1992.
[H2] F. Hirzebruch: Singularities and exotic spheres, Seminaire Bourbaki 1966/1967, Exp. 314.
[KM] M. Kervaire, J. Milnor: Groups of homotopy spheres I, Annals of Math. (2) 77 (1963), p.504-537.
[K] A. Kosiński, Differentiable manifolds, Academic Press 1992.
[L] W. Lück: A basic introduction to surgery theory, in: Topology of high-dimensional manifolds, p.1-225, ICTP Lecture Notes (2001).