

ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB
ZESTAW 3

ZADANIE 1 Niech $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{10})$, $\alpha \in \mathcal{O}_K$. Wykażemy, że $\mathcal{O}_K \neq \mathbb{Z}[\alpha]$ dla dowolnego α .

(a) Niech

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1 + \sqrt{7})(1 + \sqrt{10}), & \alpha_2 &= (1 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{10}), \\ \alpha_3 &= (1 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{10}), & \alpha_4 &= (1 - \sqrt{7})(1 - \sqrt{10}).\end{aligned}$$

Wykaż, że $3 \mid \alpha_i \alpha_j$ (w pierścieniu $\mathcal{O}_K$) dla dowolnego $i \neq j$, ale $3 \nmid \alpha_i^k$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

(Wsk. wykaż, że $\text{tr}_{K/\mathbb{Q}} \alpha_i^n \equiv \text{tr}_{K/\mathbb{Q}} \alpha_i \pmod{3}$)

OZNACZENIE: przez $\bar{g}$ oznaczmy redukcję wielomianu $g \in \mathbb{Z}[X]$ do $\mathbb{F}_3[X]$.

(b) Niech $f(X) = \min_{\mathbb{Q}}(\alpha)(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Wykaż, że dla dowolnego $g \in \mathbb{Z}[X]$ mamy:

$$3 \mid g(\alpha) \text{ w pierścieniu } \mathbb{Z}[\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \bar{f} \mid \bar{g} \text{ w pierścieniu } \mathbb{F}_3[X].$$

(c) Niech dla $1 \leq i \leq 4$ wielomian $f_i \in \mathbb{Z}[X]$ będzie taki, że $\alpha_i = f(\alpha)$. Wykaż, że w pierścieniu $\mathbb{F}_3[X]$ zachodzi podzielność $\bar{f} \mid \bar{f}_i \bar{f}_j$ (dla $i \neq j$), ale $\bar{f} \nmid \bar{f}_i^n$ dla dowolnego n . Wynioskuj, że dla dowolnego i , $\bar{f}$ ma w $\mathbb{F}_3[X]$ czynnik nierozkładalny, który nie dzieli $\bar{f}_i$, ale dzieli $\bar{f}_j$ dla $j \neq i$.

(d) To pokazuje, że $\bar{f}$ ma przynajmniej cztery różne dzielniki nad $\mathbb{F}_3$. Z drugiej strony $\deg \bar{f} \leq 4$. Czy widzisz sprzeczność?

ZADANIE 2 (WYRÓŻNIK WIELOMIANU) Niech

$$f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \in \mathbb{Q}[x].$$

Wyróżnik wielomianu f definiujemy jako $\Delta(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

(a) Wykaż, że $\Delta(f) \in \mathbb{Q}$ oraz że jeżeli $f \in \mathbb{Z}[x]$, to $\Delta(f) \in \mathbb{Z}$.

(b) Udowodnij wzór $\Delta(\alpha) = (-1)^{\binom{n}{2}} \cdot \prod_{i=1}^n f'(\alpha_i)$.

(c) Wykaż (korzystając z (b)), że dla $f = x^n + ax + b$:

$$\Delta(f) = (-1)^{\binom{n}{2}} \left((-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} a^n + n^n b^{n-1} \right).$$

Czy kojarzy Ci się to z krzywymi eliptycznymi?

(d) Wykaż, że wyróżnikiem wielomianu $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ (gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą) jest:

$$\Delta(\Phi_p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}.$$