ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB

ZESTAW 5 – Pierścienie Dedekinda

Pierścień Dedekinda:

- dziedzina całkowitości,
- pierścień Noether *(wstępujące ciągi ideałów stabilizują się)*,
- wymiar Krulla równy 1 *(każdy niezerowy ideał pierwszy jest maksymalny)*,
- całkowicie domknięty.

TWIERDZENIE Każdy pierścień Dedekinda ma własność jednoznaczności rozkładu na ideały pierwsze.
TWIERDZENIE $\mathcal{O}_K$ jest pierścieniem Dedekinda.

ZADANIE 1 Wykaż, że dowolna dziedzina ideałów głównych jest pierścieniem Dedekinda.

ZADANIE 2 Załóżmy, że R jest pierścieniem Dedekinda. Wykaż, że R ma własność jednoznaczności rozkładu wtw. gdy jest dziedziną ideałów głównych.

(Wsk. wykaż, że każdy ideał pierwszy $\mathfrak{p}$ zawiera element nierozkładalny, rozważając faktoryzację dowolnego elementu $a \in \mathfrak{p}$.)

ZADANIE 3 (a) Wykaż, że pierścień lokalny jest pierścieniem Dedekinda wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierścieniem dyskretnej waluacji (oraz nie jest ciałem).

(b) Wykaż, że jeżeli R jest pierścieniem Dedekinda, zaś $S \subset R$ – zbiorem multyplikatywnym, to $S^{-1}R$ jest pierścieniem Dedekinda.

(c) Wywnioskuj, że jeżeli R jest pierścieniem Dedekinda, to dla dowolnego $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ lokalizacja $R_{\mathfrak{p}}$ jest pierścieniem dyskretnej waluacji.

(d) Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Które z pierścieni $k[x,y]/(y^2-x^3)$, $k[x,y]/(y^2-x^3-1)$ są dziedzinami Dedekinda?

ZADANIE 4 Niech $I, J \trianglelefteq R$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Wykaż „wzór Newtona": $(I+J)^n = I^n + I^{n-1}J + I^{n-2}J^2 + \ldots + IJ^{n-1} + J^n$.

(b) Wykaż, że $I^{2n} + J^{2n} \subset (I+J)^{2n} \subset I^n + J^n$.

(c) Wykaż, że jeżeli $I + J = R$, to $I^n + J^n = R$.

(d) Udowodnij (c) przy założeniu, że R jest pierścieniem Dedekinda (korzystając z zasady „zawierać znaczy dzielić").

ZADANIE 5 Niech R będzie dziedziną całkowitości, która jest pierścieniem Noether. Niech K oznacza ciało ułamków pierścienia R. Dowieść, że R-podmoduł $I \subset K$ jest skończenie generowany, wtedy i tylko wtedy, gdy w R istnieje niezerowy element a taki, że $aI \subset R$.

ZADANIE 6 (IDEAŁY W PIERŚCIENIACH DEDEKINDA SĄ DWUGENEROWANE) Niech I będzie ideałem w pierścieniu Dedekinda R. Dowieść, że istnieją elementy $\alpha, \beta \in I$ takie, że $I = (\alpha, \beta)$.

(Wsk. Niech $\alpha \in I$ będzie dowolnym elementem takim, że $\alpha \neq 0$. Rozpiszmy $I = \prod \mathfrak{p}_i^{a_i}$. Dowieść, że $(\alpha) = \prod \mathfrak{p}_i^{b_i} \prod \mathfrak{q}_j^{c_j}$ dla pewnych ideałów pierwszych $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_j$ oraz liczb całkowitych $b_i \geqslant a_i, c_j \geqslant 1$. Korzystając z twierdzenia chińskiego o resztach dowieść, że istnieje $\beta \in R$ takie, że dla każdego i mamy $\beta \in \mathfrak{p}_i^{a_i}$, $\beta \notin \mathfrak{p}_i^{a_{i+1}}$ oraz $\beta \notin \mathfrak{q}_j$ dla $j \neq i$.)