ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB

ZESTAW 6 – Ideały pierwsze w pierścieniach Dedekinda

- rozkład ideału pierwszego w $\mathcal{O}_K$: $\quad p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_g^{e_g}, \quad N(\mathfrak{p}_i) = p^{f_i}$
  - Jeżeli $e_i > 1$ dla pewnego i, to $p | \Delta_{K/\mathbb{Q}}$.
  - Twierdzenie efg $\quad \sum_{i=1}^g e_i f_i = [K : \mathbb{Q}] \quad$ (dla $K/\mathbb{Q}$ – Galois: $e_1 = \ldots = e_g$, $f_1 = \ldots = f_g$)
  - Twierdzenie (Kummera) Niech $\mathbb{Z}[\theta] \subset \mathcal{O}_K$, $F(x) = \min_{\mathbb{Q}}(\theta)(x)$ oraz $p \nmid [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\theta]]$. Załóżmy, że $F(x)$ ma rozkład na czynniki nierozkładalne w $\mathbb{F}_p$:
$$F(x) \equiv F_1(x)^{e_1} \cdot \ldots \cdot F_g(x)^{e_r} \pmod{p}.$$
Wtedy:
$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_g^{e_g},$$
gdzie $\mathfrak{p}_i = (p, F_i(\theta))$, $f_i = \deg(F_i)$ oraz $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i = \mathbb{F}_p[x]/(F_i(x))$.
- norma ideału $I \trianglelefteq \mathcal{O}_K$: $\quad N(I) := \#(\mathcal{O}_K/I)$ dla $I \neq 0$
  - Fakt $\quad N(IJ) = N(I) \cdot N(J)$
  - Fakt $\quad N(a\mathcal{O}_K) = |N_{K/\mathbb{Q}}(a)|$
  - Fakt $\quad \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \sigma(I) = N(I)\mathcal{O}_K$

Zadanie 1 Wykaż, że jeżeli $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_K$ jest niezerowym ideałem pierwszym, to $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ dla pewnego $p \in \mathbb{P}$. Wykaż, że w tej sytuacji $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ jest ciałem skończonym charakterystyki p.

Wsk. homomorficzny przeciwobraz ideału pierwszego jest pierwszy. Ponadto $I \cap \mathbb{Z} \neq 0$ – powinno to być dowodzone na wykładzie.

Zadanie 2 Celem tego zadania jest wykazanie następującego twierdzenia:

Twierdzenie Jeżeli $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$, $z_i \neq 0$ są takie, że dla każdego n liczba:
$$z_1^n + \ldots + z_k^n$$
jest n-tą potęgą liczby całkowitej, to $k = 1$.

(a) Wykaż tezę zadania w przypadku, gdy $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}$, $z_i \neq 0$.
(Wsk. podstaw $n = p - 1$ dla dużej liczby pierwszej p.)

(b) Wykaż, że liczby $z_1, \ldots, z_n$ są całkowite algebraiczne.

(c) Wykaż twierdzenie w ogólnym przypadku, działając w $\mathcal{O}_K$ dla odpowiednio dobranego K.

Zadanie 3 Ustalmy $d \in \mathbb{Z}_+$ oraz liczbę pierwszą p. Wykaż, że równanie $p = x^2 + dy^2$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie $(x, y) \in \mathbb{Z}_+$.

Zadanie 4 Załóżmy, że $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ jest unormowanym wielomianem Eisensteina $\pmod{p}$ o pierwiastku α. Niech $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Znajdź rozkład p w $\mathcal{O}_K$.

Zadanie 5 Znajdź (ponownie) rozkład ideałów pierwszych w pierścieniu $\mathbb{Z}[\omega]$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Zadanie 6 Rozłóż ideały główne (2), (3), (7) i (29) pierścieniu $R = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ na iloczyny ideałów pierwszych. Wykaż, że wszystkie ich czynniki są ideałami głównymi.