

ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB
ZESTAW 8 – Jedności

- Twierdzenie (Dirichleta o jednościach) K – ciało liczbowe $\Rightarrow \mathcal{O}_K^\times \cong W_K \times \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1}$,
 - fundamentalna jedność w $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ – bezkwadratowe: $p_{n-1} + q_{n-1}\sqrt{d}$, gdzie:
 - n – okres ułamka łańcuchowego $\sqrt{d}$,
 - $p_{n-1}/q_{n-1} - (n-1)$ -szy redukt ułamka łańcuchowego $\sqrt{d}$.
-

ZADANIE 1 Wykazać, że jeśli ranga grupy jedności ciała liczbowego $\mathcal{O}_K$ jest równa jeden, to $[K : \mathbb{Q}] \in \{2, 3, 4\}$.

ZADANIE 2 (a) Znaleźć rozkład liczby $\sqrt{6}$ na ułamek łańcuchowy. Obliczyć jedność podstawową $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$.
(b) Wykazać, że dla $d \in \mathbb{Z}$ rozkład liczby $\sqrt{d^2+1}$ na ułamek łańcuchowy to $[d, \overline{2d}]$.
(c) Wykazać, że jeżeli d^2+1 jest wolna od kwadratu oraz $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, to jednością podstawową ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{d^2+1})$ jest $d + \sqrt{d^2+1}$. Wyznaczyć jedności podstawowe ciał: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$.

ZADANIE 3 Niech R będzie pierścieniem Dedekinda oraz niech S będzie skończonym zbiorem ideałów pierwszych, niezerowych z R . Niech R^S będzie lokalizacją na zbiorze mnożymywnym $R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}$

- (a) Wykazać, że $R^\times = \bigcap_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}}^\times$ oraz że $K^\times / R_{\mathfrak{p}}^\times \cong \mathbb{Z}$ dla każdego $\mathfrak{p}$.
- (b) Wykazać dokładność następującego naturalnego ciągu homomorfizmów grup:

$$1 \rightarrow R^\times \rightarrow (R^S)^\times \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} K^\times / R_{\mathfrak{p}}^\times \rightarrow Cl(R) \rightarrow Cl(R^S) \rightarrow 1.$$

- (c) Niech $R = \mathcal{O}_K$, gdzie K jest ciałem liczbowym. Wyprowadzić (z (b) i z twierdzenia Dirichleta o jednościach) izomorfizm grup mnożymywnych:

$$(R^S)^\times \cong W_K \times \mathbb{Z}^{|S|+r_1+r_2-1}.$$

ZADANIE 4 Wybierzmy bazę $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r_1+r_2-1}$ grupy $\mathcal{O}_K/W_K$ i niech $M \in M_{r_1+r_2-1, r_1+r_2}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której j -ty wiersz równy jest:

$$(\log |\sigma_1(\varepsilon_j)|, \dots, \log |\sigma_{r_1}(\varepsilon_j)|, 2 \log |\tau_1(\varepsilon_j)|, \dots, 2 \log |\tau_{r_2}(\varepsilon_j)|).$$

Niech M_0 oznacza macierz, która powstaje z M po usunięciu jednej kolumny. Wykazać, że liczba $|\det(M_0)|$ nie zależy od tego którą kolumnę usunięto z M i więcej, że jest to różna od zera liczba rzeczywista zależna tylko od ciała liczbowego K (REGULATOR CIAŁA K).

Wsk.: Wykorzystaj to, że współrzędne każdej kolumny sumują się do zera.

ZADANIE 5 Niech K będzie ciałem liczbowym.

- (a) Niech $\alpha \in K$ będzie pierwiastkiem wielomianu unormowanego $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ oraz niech $f(r) = \pm 1$ dla pewnego $r \in \mathbb{Z}$. Wykazać, że wtedy $\alpha - r \in \mathcal{O}_K^\times$.
- (b) Niech m będzie liczbą całkowitą wolną od sześciannu. Wyróżnik ciała $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$ wynosi $\Delta_K = -27m^2$. Wykorzystać ten fakt i lemat z wykładu do wyznaczenia jedności podstawowej ciał $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ oraz $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.