ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB
ZESTAW A

TERMIN ODDANIA ZADAŃ: 07.04.2017
Współpraca jest dopuszczalna, a nawet zalecana, jednakże rozwiązania powinny być opisane samodzielnie i własnymi słowami.

Teoria ciał i teoria Galois

ZADANIE 1 Niech M/K będzie rozszerzeniem Galois, zaś $\alpha \in M$. Wykaż, że jeżeli L/K jest rozszerzeniem Galois zawartym w M, to wielomian $\min_K(\alpha)(x) \in K[x]$ rozkłada się nad $L[x]$ na iloczyn wielomianów TEGO SAMEGO STOPNIA. (10 PKT)

(Wsk. jaki warunek musi spełniać $\mathrm{Gal}(M/L)$, aby L/K było Galois? Rozważ działanie grupy Galois na elementach sprzężonych do α i sprowadź problem do prostego zadania z teorii grup.)

ZADANIE 2 Niech $f \in \mathbb{Q}[x]$ będzie nierozkładalnym wielomianem, który ma zarówno pierwiastki rzeczywiste, jak i nierzeczywiste. Wykaż, że grupa Galois tego wielomianu (czyli grupa Galois jego ciała rozkładu) jest nieprzemienna. (5 PKT)

ZADANIE 3 (TEORIA ARTINA-SCHEIERA) Niech K będzie ciałem charakterystyki $p > 0$. Celem tego zadania jest klasyfikacja rozszerzeń abelowych o wykładniku p.

(a) Załóżmy, że dla pewnego $a \in K$ wielomian $f(x) = x^p - x - a$ nie ma pierwiastka w K. Niech L/K będzie ciałem rozkładu tego wielomianu. Wykaż, że L/K jest rozszerzeniem Galois oraz $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/p$.

(Wsk. jeżeli α jest pierwiastkiem f, to $\alpha + 1$ również.)

(b) Wykaż, że jeżeli L/K jest rozszerzeniem Galois spełniającym $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/p$, to $L = K(\alpha)$, gdzie α jest pierwiastkiem wielomianu $x^p - x - a$ dla pewnego $a \in K$.

(Wsk. odpowiednikiem rezolwenty Lagrange'a jest element
$\frac{1}{\mathrm{tr}_{L/K}(b)} (\sigma(b) + 2 \cdot \sigma^2(b) + \cdots + (p-1) \cdot \sigma^{p-1}(b))$.*)*
(10 PKT)

ZADANIE 4 (ZADANIE ŁUKASZA NIZIO – WERSJA POPRAWIONA) Niech $K/\mathbb{Q}$ będzie rozszerzeniem Galois. Ustalmy zanurzenie $K \subset \mathbb{C}$. Załóżmy, że $K \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$. Wykaż, że K jest ciałem kwadratowym urojonym lub $\mathbb{Q}$. (5 PKT)

Jednoznaczność rozkładu

Zadanie 1 Rozważmy pierścień liczb całkowitych Eisensteina $\mathbb{Z}[\omega]$, gdzie $\omega^2+\omega+1=0$.

(a) Znajdź normę elementu $a+b\omega$ (gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$).

(b) Znajdź jedności w pierścieniu $\mathbb{Z}[\omega]$.

(c) Wykaż, że $\mathbb{Z}[\omega]$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

(Wsk. dla $x/y = a+b\omega$ przyjmij $q = A+B\omega$, gdzie $A, B \in \mathbb{Z}$, $|a-A|$, $|b-B| < \frac{1}{2}$)

(d) Wykaż, że liczba pierwsza $p > 3$ jest postaci a^2+ab+b^2 dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 1 \pmod 6$. (10 pkt)

(Wsk. możesz przyjąć za znany następujący fakt: -3 jest kwadratem $\pmod p$ wtw. $p = 3$ lub $p \equiv 1 \pmod 6$)

Zadanie 2 Wykaż, że $R = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ nie jest dziedziną Euklidesa. (10 pkt)

(Wsk. niech $x \in R \setminus \{0, \pm 1\}$ będzie elementem o najmniejszej wartości funkcji Euklidesa. Wykaż, że $|R/xR| \in \{2, 3\}$.)

Uwaga: okazuje się, że $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

Zadanie 3 Wykaż, że równanie $x^2+61 = y^3$ ma rozwiązania całkowite. Wywnioskuj, że $\mathbb{Z}[\sqrt{-61}]$ nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu. (5 pkt)

Liczby całkowite algebraiczne

Zadanie 1 Wykaż, że liczba

$$N = \sqrt{1001^2+1} + \sqrt{1002^2+1} + \ldots + \sqrt{2017^2+1}$$

jest niewymierna. (5 pkt)

(Wsk. oszacuj w jakiś sposób $\sqrt{x^2+1} - x$. Może znasz jakieś sposoby na takie szacowania z analizy?)

Zadanie 2 Czy $\mathbb{Z}[\sqrt{3}, \sqrt{7}]$ jest pierścieniem liczb całkowitych w $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$? Odpowiedź uzasadnij. (5 pkt)

Zadanie 3 Wykaż, że pierścień liczb całkowitych w $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-1})$ to:

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-1} \oplus \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \oplus \mathbb{Z}\frac{\sqrt{-1}+\sqrt{-5}}{2}. \qquad \text{(10 pkt)}$$