ALGEBRAICZNA TEORIA LICZB
ZESTAW C

TERMIN ODDANIA ZADAŃ: 16.04.2017

Pierścienie Dedekinda

ZADANIE 1 Niech k będzie ciałem. Czy $k[x,y]$ jest dziedziną Dedekinda? Uzasadnij. (5 PKT)

ZADANIE 2 Czy $\overline{\mathbb{Z}}$ (zbiór liczb całkowitych algebraicznych) jest pierścieniem Dedekinda? (5 PKT)

ZADANIE 3 Dowieść, że jeżeli w pierścieniu Dedekinda R istnieje tylko skończenie wiele ideałów pierwszych, to R jest dziedziną ideałów głównych. (10 PKT)

(Wsk. Niech $Spec(R) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. Za pomocą twierdzenia chińskiego o resztach dowieść, że w R istnieją $\alpha_1 \in \mathfrak{p}_1$, . . . , $\alpha_n \in \mathfrak{p}_n$ takie, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ mamy $\alpha_i \notin \mathfrak{p}_i^2$ oraz $\alpha_i \notin \mathfrak{p}_j$, gdy $i \neq j$).

ZADANIE 4 (a) Wykaż, że jeżeli R jest dziedziną całkowitości, to $\bigcap_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}} = R$ (przekrój brany po wszystkich ideałach maksymalnych pierścienia R).

(b) Wykaż, że jeżeli dziedzina całkowitości R jest Noetherowska oraz lokalizacja na każdym ideale maksymalnym jest dziedziną dyskretnej waluacji, to R jest pierścieniem Dedekinda. (10 PKT)

Wsk. (a) niech $\alpha \in K$ należy do $\bigcap_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$. Rozważmy zbiór $\{r \in R : r\alpha \in R\}$ – jest to ideał w R. Jeżeli byłby on nietrywialny, to byłby zawarty w...
(b) ad. całkowita domkniętość – skorzystaj z (a). Ad. wymiar Krulla – jak wyglądają ideały pierwsze w lokalizacji?

Ideały w pierścieniach Dedekinda

ZADANIE 1 Niech R będzie pierścieniem Dedekinda, zaś $I, J \trianglelefteq R$.

(a) Zdefiniujmy ideał $NWD(I, J)$ jako $\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\min\{\alpha_{\mathfrak{p}}, \beta_{\mathfrak{p}}\}}$, gdzie

$$I = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\alpha_{\mathfrak{p}}}, \qquad J = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\beta_{\mathfrak{p}}}$$

są rozkładami na ideały pierwsze. Wykaż, że $NWD(I, J) = I + J$.

(Wsk. "zawierać = dzielić". Jaki warunek spełnia zatem ideał N, który dzieli zarówno I, jak i J? Zastosuj metody z zadania 4'(d) z zestawu 5.)

(b) Zdefiniuj analogicznie $NWW(I, J)$ oraz wykaż, że $IJ = (I + J) \cdot (I \cap J)$. (10 PKT)

ZADANIE 2 Niech K będzie ciałem liczbowym, zaś $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathcal{O}_K$ – ideałem całkowitym. Niech $\alpha_1, ..., \alpha_n$ będzie bazą całkowitą $\mathfrak{a}$, tzn.

$$\mathfrak{a} = \alpha_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \alpha_n\mathbb{Z}.$$

Wykaż, że $\det[\sigma_j(\alpha_i)]_{i,j}^2 = (N\mathfrak{a})^2 \cdot \Delta_K$, gdzie $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ są wszystkimi zanurzeniami $K \hookrightarrow \mathbb{C}$. (10 PKT)

ZADANIE 3 Ustalmy $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ oraz liczbę pierwszą p. Wykaż, że równanie $p = x^2 + dy^2$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie $(x, y) \in \mathbb{Z}_+$. (10 PKT)

ZADANIE 4 Niech K będzie ciałem liczbowym.

(a) Jeżeli $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathcal{O}_K$ jest ideałem, to istnieje skończone rozszerzenie L/K takie, że $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L$ jest główny.

(b) Wykaż, że istnieje skończone rozszerzenie M/K takie, że każdy ideał z $\mathcal{O}_K$ jest główny po rozszerzeniu do $\mathcal{O}_M$. (10 PKT)

(Wsk. (a) pewna potęga $\mathfrak{a}$ jest główna. (b) Wykorzystaj skończoność liczby klas.)

Grupa klas i geometria liczb

ZADANIE 1 ("$Pic(R)$ w inny sposób") Niech R będzie pierścieniem Dedekinda. Niech $G(R)$ oznacza zbiór klas abstrakcji $[I]_\sim$ następującej relacji: dwa niezerowe ideały I i $J \subset R$ są w relacji $\sim$ jeżeli istnieją różne od zera elementy $a, b \in R$ takie, że $aI = bJ$. Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności.

(a) Dowiedź, że jeśli $I \sim J$ oraz $I_0 \sim J_0$, to $II_0 \sim JJ_0$. Wywnioskuj, że mnożenie ideałów wprowadza strukturę grupy abelowej na zbiorze klas $G(R)$.

(b) Dowiedź, że $G(R) \cong Pic(R)$. (10 PKT)

ZADANIE 2 Niech $p \in \mathbb{P}, p \equiv 5 \pmod{12}, p > 3^n$. Wykaż, że grupa klas ciała $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ zawiera element rzędu większego od n. W szczególności liczba klas ciała kwadratowego urojonego może być dowolnie duża. (10 PKT)

Wsk. Niech $(3) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$. Jeżeli $\mathfrak{p}^r = (c + d\sqrt{p})$, to $c^2 + pd^2 = 3^r$. Gdyby zachodziło $d = 0$, to $(3) = \mathfrak{p}^2$ – sprzeczność!

ZADANIE 3 (a) Znajdź grupę klas dla $\mathbb{Q}(\sqrt{-13})$.

(b) Rozwiąż równanie $x^2 = y^3 - 13$ w liczbach całkowitych. (10 PKT)

ZADANIE 4 Wykaż, że w dowolnym ciele liczbowym $K/\mathbb{Q}$ pewna liczba pierwsza rozgałęzia się.

Wsk. jaki warunek spełniają rozgałęzione liczby pierwsze? Skorzystaj z oszacowania Minkowskiego. (5 PKT)

ZADANIE 5 Niech $M \in M_3(\mathbb{Z})$ będzie macierzą dodatnio określoną o wyznaczniku 1. Wykaż, że istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{Z}^3$ taki, że $v^T M v = 1$. (10 PKT)

Wsk. zastosuj twierdzenie Minkowskiego do zbioru $Z := \{v \in \mathbb{R}^3 : v^T M v < 2\}$. *Oblicz najpierw* $vol(Z)$ *w przypadku* $M = I_3$. *W ogólnym przypadku, skorzystaj z tego, że* $M = AA^T$ *dla pewnej macierzy* $A \in M_3(\mathbb{R})$, $\det A = 1$.