PODSTAWY MATEMATYKI
ZESTAW 13 – Granice funkcji

Zadanie 1 Oblicz podane granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} (\sin x - \cos x)$,

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^4 - x^3 + 1}{2x \cdot (x^3 + x + 1)}$,

(d) 🏠 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x(x-5)}$,

(e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$,

(f) 🏠 $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{2x}$

(h) 🏠 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6 + x + 1}{x^6 + 2x^4 - x^3}$,

(j) 🏠 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^7 + 10x - 1}{x^5 - x^3 + 3x^2}$,

(k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{1 - x^2}$,

(l) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6}$,

(m) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2^x + 3^x}{3^x + 1}$,

(n) 🏠 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{25^x - 9^x}{5^x - 3^x}$,

(o) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$,

(p) 🏠 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x}$

Zadanie 2 Oblicz podane granice, korzystając z twierdzenia l'de Hospitala:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$,

(b) 🏠 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x) - \ln x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln x$,

(f) 🏠 $\lim\limits_{x\to -\infty} x(e^{1/x} - 1)$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$,

(h) 🏠 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$,

(i) 🏠 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$,

(j) $\lim\limits_{x\to \infty} (x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$,

(k) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$,

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$,

Zadanie 3 * Wykaż, że jeżeli dla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mamy $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$, to $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.