

PODSTAWY MATEMATYKI
ZESTAW 2 – Logika c.d.

ZADANIE 1 Oto fragment raportu policji sporządzony przez młodego aspiranta:

Świadek nie był zastraszony lub też, jeśli Henry popełnił samobójstwo, to testament odnaleziono. Jeśli świadek był zastraszony, to Henry nie popełnił samobójstwa. Jeśli testament odnaleziono, to Henry popełnił samobójstwo. Jeśli Henry nie popełnił samobójstwa, to testament odnaleziono.

Co komendant policji może wywnioskować z powyższego raportu (poza oczywistym faktem, że należy zwolnić aspiranta)? Odpowiedz na pytania: Czy świadek był zastraszony? Czy Henry popełnił samobójstwo? Czy testament odnaleziono? ¹

ZADANIE 2 Wyznacz wartość logiczną podanego wyrażenia i zapisz jego negację.

(a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2x,$

(d) $\exists x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : xy = 10,$

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 2 \vee x < 2,$

(e) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (x \neq 0 \rightarrow xy = 10),$

(c) $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 < 0 \rightarrow x = 2),$

(f) $\forall x \in \mathbb{R} (x \neq 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : xy = 10).$

ZADANIE 3 Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, jeśli

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Nie używając znaku negacji zapisz formułę „funkcja f nie jest ciągła”.

ZADANIE 4 Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą (w sensie Heinego) funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie y , jeśli

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \neq y \right) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \right).$$

Nie używając znaku negacji zapisz formułę „liczba g nie jest granicą funkcji f w punkcie y ”.

ZADANIE 5 Zapisz za pomocą symboli matematycznych następujące zdania:

(a) Ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest malejący.

(b) Ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest od pewnego miejsca stały.

ZADANIE DOMOWE

1. Zapisz za pomocą symboli mat. zdania „każdy student zna co najmniej dwa języki”, „ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony”.
2. Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą (w sensie Cauchy’ego) funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie x_0 , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon).$$

Nie używając znaku negacji zapisz formułę „liczba g nie jest granicą funkcji f w punkcie x_0 ”.

¹źródło: Leszek Pacholski, Logika dla informatyków