

PODSTAWY MATEMATYKI
ZESTAW 5 – Szeregi

Ogólne własności:

- definicja: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$,
- warunek konieczny zbieżności: jeżeli $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ jest zbieżny, to $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$,
- jeżeli $\sum_i |a_i| < \infty$, to mówimy, że szereg jest **ZBIEŻNY BEZWZGLĘDNIE**. Wtedy:
 - szereg $\sum_i a_i$ jest zbieżny,
 - suma szeregu $\sum_i a_i$ nie zależy od kolejności.

Kryteria zbieżności:

- (kryterium Cauchy'ego) Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$. Jeżeli $g < 1$, to szereg $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ jest zbieżny bezwzględnie. Jeżeli $g > 1$, to szereg jest rozbieżny.
 - (kryterium d'Alemberta) Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = g$. Jeżeli $g < 1$, to szereg $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ jest zbieżny bezwzględnie. Jeżeli $g > 1$, to szereg jest rozbieżny.
 - (kryterium porównawcze) jeżeli $0 \leq a_i \leq b_i$ oraz $\sum_i b_i < \infty$, to $\sum_i a_i$ jest zbieżny.
 - (kryterium porównawcze, v2) jeżeli $0 < a_i, b_i$ oraz $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} = g \in (0, \infty)$, to szeregi $\sum_i a_i, \sum_i b_i$ są równocześnie zbieżne lub rozbieżne.
- Dobry szereg do porównywania: $\sum_n \frac{1}{n^a} < \infty$ wtw. gdy $a > 1$.*
- kryterium Leibniza: jeżeli $(a_i)_i$ jest malejący oraz $\lim_i a_i = 0$, to $\sum_i (-1)^i a_i$ jest zbieżny.
-

ZADANIE 1 Znajdź sumy częściowe i sprawdź zbieżność:

(a) $\sum_n (-1)^n$, (b) $\sum_n \frac{1}{n \cdot (n+1)}$, (c) $\sum_n \pi^{-n}$.

ZADANIE 2 Zbadaj zbieżność szeregu, korzystając z kryterium d'Alemberta:

(a) $\sum_n \frac{100^n}{n!}$, (b) $\sum_n \frac{n!}{n^n}$, (c) $\sum_n \frac{n! \cdot (3n)!}{[(2n)!]^2}$.

ZADANIE 3 Zbadaj zbieżność szeregu, korzystając z kryterium Cauchy'ego:

(a) $\sum_n n^2 e^{-n^3}$, (b) $\sum_n \frac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n}$, (c) $\sum_n \pi^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

ZADANIE 4 Zbadaj zbieżność szeregu:

(a) $\sum_n (-1)^n (2n-1)$, (b) $\sum_n \frac{n+2}{n^3-3}$, (c) $\sum_n (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

ZADANIE DOMOWE

Zbadaj zbieżność szeregów:

$$\sum_n \frac{2^n + 1}{3^n - 1}, \quad \sum_n \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}, \quad \sum_n \sin^n \frac{1}{n}, \quad \sum_n \frac{\sqrt{n} - n^{1/3}}{(n+1)^2}$$