Warsztat pracy matematyka

Izabela Bondecka-Krzykowska
Marcin Borkowski

Język matematyki

Teoria

Jednym z podstawowych pojęc matematyki jest pojęcie zbioru. Teorię opisującą zbiory nazywa sie teorią mnogości.

Definicja 1. Język teorii mnogości (teorii zbiorów) zawiera wszystkie symbole rachunku zdań oraz następujące symbole specyficzne dla tej teorii:
– symbol zbioru pustego $\emptyset$, tzn. zbioru nie posiadającego żadnego elementu,
– symbol przynależności elementu do zbioru $\in$. Wyrażenie $x \in A$ czytamy jako „x jest elementem zbioru A” lub „x należy do A”.
– symbol inkluzji (zawierania się zbiorów) $\subseteq$. Wyrażenie $A \subseteq B$ oznacza, że zbiór A zawiara się w zbiorze B, tzn., że każdy element zbioru A jest również elementem zbioru B:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x (x \in A \longrightarrow x \in B).$$

Definicja 2. Działania na zbiorach. Niech dane będą zbiory A i B. Przyjmujemy następujące definicje

(1) Suma *zbiorów A i B jest to zbiór $A \cup B$ spełniający warunek*

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B,$$

czyli

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

(2) Przekrój (iloczyn, część wspólna) *zbiorów A i B jest to zbiór $A \cap B$ spełniający warunek*

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B,$$

czyli

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

(3) Różnica *zbiorów A i B jest to zbiór $A \setminus B$ spełniający warunek*

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B,$$

czyli

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

(4) Dopełnieniem *zbioru A w zbiorze (względem zbioru) (uniwersum) U nazywamy zbiór A' spełniający warunek*

$$A' = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\},$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Oblicz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$ dla następujących przedziałów:
a) $A = (-\infty; 2]$, $B = (1; 4]$
b) $A = (-3; 2]$, $B = (0; 1]$
c) $A = [-2; 2]$, $B = (-1; 2)$
d) $A = (-\infty; 2]$, $B = (2; \infty)$
e) $A = (3; \infty]$, $B = \{2, 3, 4\}$
Odpowiedź: a)$A \cup B = (-\infty, 4]$, $A \cap B = (1, 2]$, $A \setminus B = (\infty, 1]$, $B \setminus A = (2'4]$;
b)$A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \setminus B = (-3, 0] \cup (1, 2]$, $B \setminus A = \emptyset$;
c)$A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \setminus B = [-2, -1]$, $B \setminus A = \emptyset$;
d)$A \cup B = \Re$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$;
e)$A \cup B = \{2\} \cup [3; \infty)$, $A \cap B = \{4\}$, $A \setminus B = (3, 4) \cup (4'\infty)$, $B \setminus A = \{2, 3\}$.

Zadanie 2. A jest zbiorem wszystkich czworokątów, B jest zbiorem wszystkich kwadratów ma płaszczyźnie E. Jakimi figurami geometrycznymi są elementy następujących zbiorów:$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$?

Zadanie 3. Spośród 100 studentów 24 uczy się języka niemieckiego, 41 - francuskiego, 6 - angielskiego i francuskiego, 9 -niemieckiego i francuskiego, 15 - tylko niemieckiego, 20 - niemieckiego, ale nie angielskiego, 32 - nie uczy się żadnego z wymienionych języków. Ilu studentów uczy się tylko języka angielskiego, a ilu tylko języka angielskiego i niemieckiego?
Odpowiedź: Rozwiązanie zilustrować na diagramie Venna. Tylko języka angielskiego uczy się 12 studentów, nie ma studentów uczących się tylko angielskiego i niemieckiego.

Zadanie 4. Zapisz w języku teorii mnogości jakie związki zachodzą pomiędzy zbiorami A, B i C określonymi następująco:
a) A = zbiór osób z co najmniej podstawowym wykształceniem (takich które ukończyły szkołę podstawową)
B = zbiór osób z co najmniej średnim wykształceniem
C = zbiór osób z wyższym wykształceniem

Odpowiedź: $C \subseteq A$, $B \subseteq A$, $C \subseteq B$

Uwagi metodologiczne. Warunki z rozwiązania można zapisać równoważnie inaczej np. zamiast $C \subseteq A$ można napisać $C \cup A = A$.
b) A = zbiór ludzi znających co najmniej dwa języki

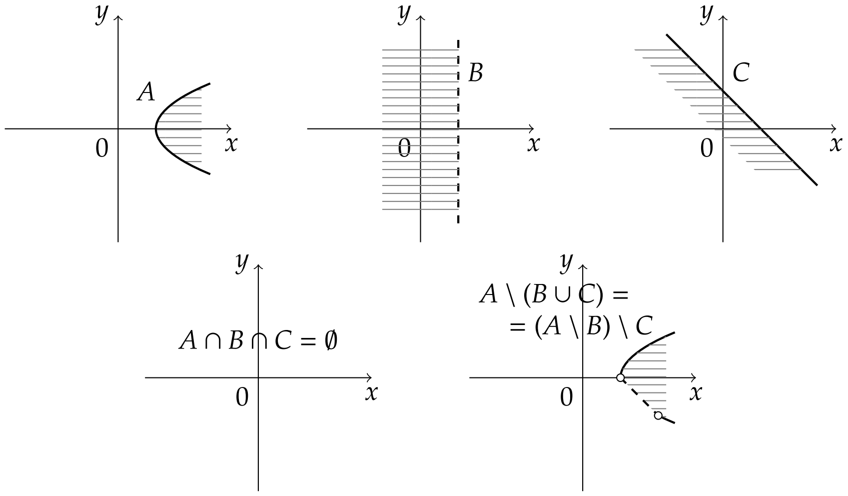
B = zbiór osób znających co najwyżej dwa języki
C = zbiór osób znajacych dokładnie dwa języki

Odpowiedź: $C \subseteq A$, $C \subseteq B$, $C = A \cap B$

Uwagi metodologiczne. Wyrażenie ”dokładnie dwa” oznacza nie mniej niż dwa oraz nie więcej niż dwa. Jest to zatem koniunkcja dwóch warunków.

Zadania dodatkowe

Zadanie 5. Zaznacz na płaszczyźnie zbiory $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \geqslant y^2\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leqslant 1\}$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus (B \cup C)$, $(A \setminus B) \setminus C$.
Odpowiedź:



Zadanie 6. Sprawdź za pomocą diagramów Venna, które z podanych niżej implikacji są prawdziwe.
a) $[(A \cap C' = \emptyset) \wedge (B \cap A \neq \emptyset)] \rightarrow (B \cap C \neq \emptyset)$
b) $[(B \cap C = C) \wedge (A \cap C \neq \emptyset)] \rightarrow (A \cap B \neq \emptyset)$
c) $[(A \setminus B = \emptyset) \wedge (C \setminus B = \emptyset)] \rightarrow (A \setminus C = \emptyset)$
d) $[(A \cup B \neq \emptyset) \wedge (B \cup C \neq \emptyset)] \rightarrow (A \cup C = \emptyset)$.

Szkic rozwiązania. Korzystamy z diagramów Venna dla trzech zbiorów. Fakt, że dany obszar jest pusty oznaczamy przez jego zakreskowanie. Natomiast to, że jest niepsuty przez umieszczenie w tym obszarze znaku X. Rozwiązania przedstawiają ilustracje:

Uwagi metodologiczne. W przykładzie d) warto użyć kolorów. Tym samym kolorem zaznaczamy brzeg obszaru oraz X oznaczający, że obszar ten jest niepusty.
Odpowiedź: a) tak, b) tak, c) nie d) nie

Zadania domowe

Zadanie 7. Zapisz w języku teorii mnogości jakie związki zachodzą pomiędzy zbiorami A, B i C określonymi następująco:
A = zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 2 lub przez 3
B = zbiór liczb podzielnych prez 2 a niepodzielnych przez 3
C = zbiór takich liczb, które spełniają warunek: jesli liczba dzieli się przez dwa, to dzieli się przez trzy.
Odpowiedź: $B \subseteq A$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$.

Zadanie 8. A jest zbiorem wszystkich trójkatów równobocznych, B jest zbiorem wszystkich trójkatów równoramiennych, C jest zbiorem wszystkich trójkatów prostokatnych na płaszczyźnie E. Jakimi figurami geometrycznymi są elementy następujących zbiorów: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$?
Odpowiedź: $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A$- równoramienne ale nie równoboczne, $A \cap C = \emptyset$, $A \setminus C = A$, $C \setminus A = C$

Zadanie 9. Zapisz podane twierdzenia w postaci implikacji. Zapisz twierdzenia odwrotne, przeciwne i przeciwstawne do nich oraz oceń ich wartość logiczną.
a) Pole prostokąta o bokach a i b wynosi ab.
b) Liczba całkowita podzielna przez 12 jest podzielna przez 3 i przez 4.

Dowody niekonstruktywne

Dowód niekonstruktywny to rodzaj dowodu matematycznego, w którym wykazuje się istnienie pewnych obiektów (zbiorów, liczb, figur geometrycznych o pewnych własnościach), zwykle nie wprost, przez stwierdzeni, że nieprawdziwość tezy twierdzenia prowadziłaby do sprzeczności, bez podania sposobu ich konstruowania.

Przykład 1. Twierdzenie. Istnieją liczby niewymierne a i b takie, że a^b jest liczbą wymierną.

Dowód. Przyjmijmy $a = b = \sqrt{2}$ (wiemy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną). Mamy do rozważenia dwie możliwości (co wynika z prawa logiki nazywanego prawem wyłączonego środka "trzeciego wyjścia nie ma"):
a) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną, Wtedy a i b spełniają tezę twierdzenia.
b) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nie jest liczbą wymierną. Wtedy jednak wystarczy wziąć dwie liczby niewymierne $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ oraz $b = \sqrt{2}$, co daje $a^b = 2$ a 2 jest liczbą wymierną. Koniec dowodu.

Dowód ten jednak nie stwierdza wprost, który przypadek zachodzi!

Przykładami dowodów niekonstruktywnych są dowody twierdzeń opartych na zasadzie szufladkowej Dirichleta:

Twierdzenie 1. *Zasada szufladkowa Dirichleta. Jeżeli m przedmiotów włożymy do n różnych szufladek, przy czym m ¿n, to co najmniej w jednej szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.*

Przykład 2. Wśród mieszkańców Warszawy co najmniej dwie osoby mają tę samą liczbę włosów na głowie.

Dowód. Liczba włosów na głowie człowieka nie przekracza 500 000, natomiast liczba mieszkańców Warszawy przekracza 1 000 000. Weźmy 500 000 szufladek ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 500 000 i wkładajmy do szufladki o danym numerze osoby, które mają taką liczbę włosów na głowie, jak numer szufladki. Ponieważ osób jest ponad 1 000 000, a szufladek 500 000, z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w jednej lub więcej szufladkach musi się znaleźć więcej niż jedna osoba. Nie wiemy jednak jakie są te szufladki, więc nie wiemy jaka liczba włosów powtarza się!

Przykład 3. W grupie 20 osób muszą być co najmniej dwie, które urodziły się w tym samym miesiącu.

Dowód. Weźmy 12 szufladek z nazwami miesięcy i wkładajmy do nich osoby, które urodziły się w danym miesiącu. Ponieważ osób jest 20, a szufladek 12, w jednej z nich muszą być co najmniej dwie osoby. Nie wiemy o jaki miesiąc chodzi!

Literatura

(a) Marciszewski W. [red.], Mała encyklopedia logiki, Zakład Narodowy Imienia Ossolińskich – Wydawnictwo, Wrocław – Warszawa – Kraków, Gdańsk – Łódź, 1988.
(b) Murawski R., Świrydowicz K., Wstęp do teorii mnogości, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2005.
(c) Chronowski A., Zadania z elementów teorii mnogości i logiki matematycznej, Wydawnictwo Dla szkoły, Wilkowice 1999.