Funkcje

Krzysztof Piszczek

Teoria

Definicja 1. Niech dane będą zbiory X oraz Y. **Funkcją** f ze zbioru X do (w) zbiór Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X jednego i tylko jednego elementu zbioru Y. Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f i oznaczamy $\mathcal{D}_f$, zaś Y **przeciwdziedziną** i oznaczamy $\mathcal{D}_f^{-1}$. **Zbiorem wartości** funkcji f nazywamy zbiór $f(\mathcal{D}_f) := \{f(x)\colon\ x \in X\}$. Elementy dziedziny nazywamy **argumentami** funkcji, zaś elementy zbioru wartości **wartościami funkcji**.

Przykład 1. (i) Funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zdefiniowane wzorami $f(x) := (x+1)^2$ oraz $g(x) := x^2+2x+1$ są równe.
(ii) Funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zdefiniowane wzorami $f(x) := \sqrt{x^2}$ oraz $g(x) := x$ nie są równe.
(iii) Funkcje $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ są równe bądź różne, w zależności od rozumienia pojęcia równości funkcji – patrz uwagi powyżej.

Przykład 2. Przyporządkowanie każdemu wielomianowi jego wartości w zerze jest odwzorowaniem ze zbioru wielomianów w zbiór liczb rzeczywistych.

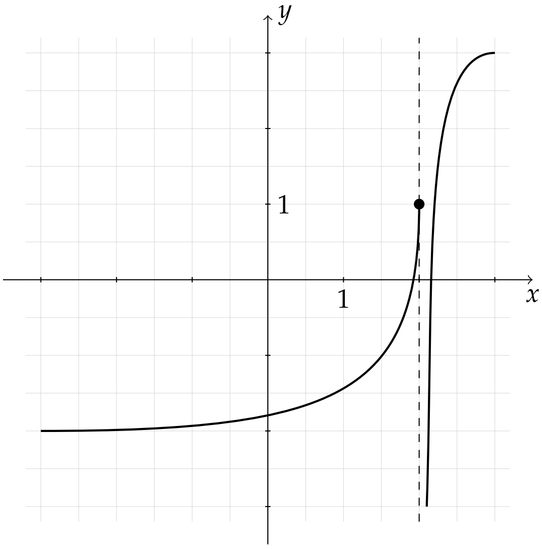
Przykład 3. Na powierzchni sfery wybieramy wielki okrąg i wpisujemy w niego prostokąty. Następnie tworzymy ostrosłupy o podstawie prostokąta, „brakujący” wierzchołek obierając na powierzchni sfery. Każdemu wcześniej ustalonemu prostokątowi przypisujemy objętość tak otrzymanego ostrosłupa. Tak zdefiniowane przyporządkowanie ze zbioru prostokątów wpisanych w okrąg w zbiór liczb dodatnich nie jest funkcją.

Przykład 4. Zbiór par uporządkowanych $\{(3, 15), (7, 2), (8, 13), (8, 17), (\sqrt[3]{254}, 0)\}$ nie definiuje funkcji.

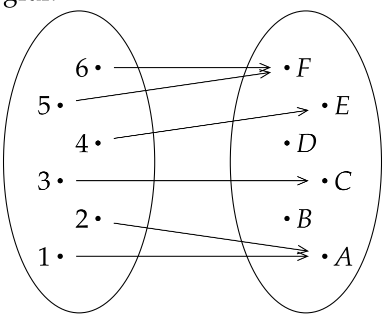
Przykład 5. Sposoby definiowania funkcji.
(i) wzór:
$f(x) := x^2 + \sin x - 3$,
(ii) tabela:

x	$f(x)$
1	15
4	8
5,5	13
$\sqrt[3]{254}$	0

(iii) wykres:



(iv) graf:



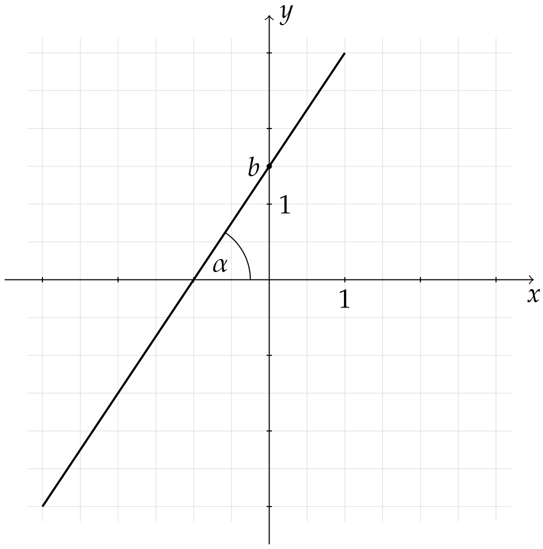
(v) zbiór par uporządkowanych:
$\{(1,15),(4,8),(5,13),(\sqrt[3]{254},0)\}$,

(vi) opis słowny:
każdemu wielokątowi na płaszczyźnie przyporządkowujemy jego obwód – odwzorowanie to jest funkcją, której dziedziną jest zbiór wielokątów płaszczyzny, zaś przeciwdziedziną zbiór liczb rzeczywistych.

Uwaga 1. Gdy dziedzina nie jest wyraźnie określona, mamy zawsze na myśli dziedzinę naturalną, tj. największy zbiór, na którym wartość funkcji ma sens matematyczny. Oczywiście zakładamy tutaj, że znamy już przeciwdziedzinę.

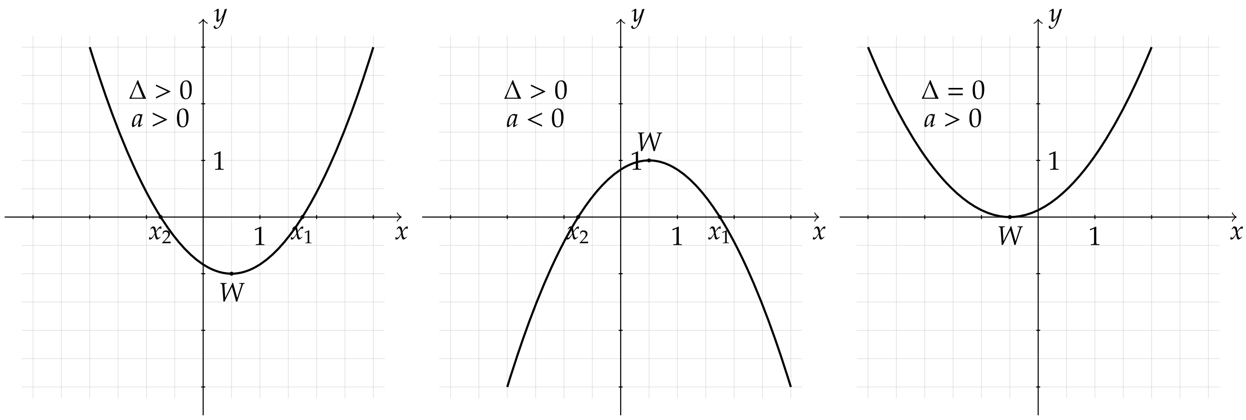
Definicja 2. Funkcja liniowa (afiniczna), to odwzorowanie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dane wzorem $f(x) :=$

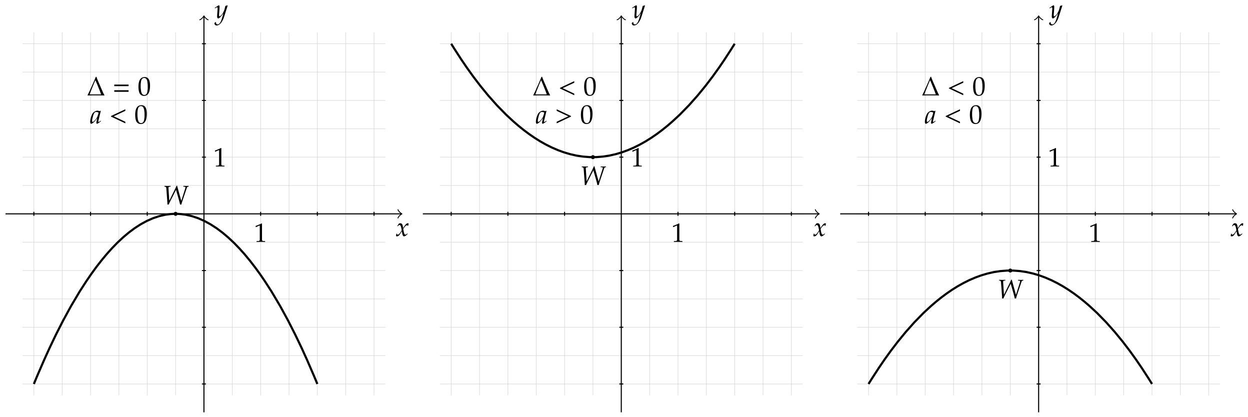
$ax + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$. Parametr a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, zaś b wyrazem wolnym.



Uwaga 2. Wykresem funkcji liniowej jest prosta, nachylona do osi OX pod kątem $\alpha \in [0, \pi)$ spełniającym równanie $\operatorname{tg} \alpha = a$. Zauważmy, że funkcja liniowa jest jednoznacznie określona przez współczynnik kierunkowy i wyraz wolny. Do tego potrzeba i wystarcza znajomość współrzędnych dwóch punktów, które należą do wykresu funkcji liniowej.
Prostą można przedstawić na wiele sposobów. Oprócz postaci kierunkowej, użytej w definicji, wymienimy jeszcze postać ogólną $Ax + By + C = 0,\ \ A, B, C \in \mathbb{R}$, przy czym zakładamy, że bądź A, bądź B nie jest zerem. Gdy $B = 0$, to równanie $Ax + C = 0$ przedstawia prostą, która nie jest wykresem żadnej funkcji zmiennej x, ale jest wykresem funkcji liniowej zmiennej y.

Definicja 3. Funkcja kwadratowa (trójmian kwadratowy), to odwzorowanie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dane wzorem $f(x) := ax^2 + bx + c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Jest to postać ogólna. Wykres trójmianu nazywamy **parabolą**. Poniższe rysunki przedstawiają możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej.





(i) **wyróżnik trójmianu**: $\Delta := b^2 - 4ac$;

(ii) gdy $\Delta \geqslant 0$, to możemy obliczyć **pierwiastki trójmianu**: $x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}-b}{2a}$, $x_2 = \frac{-\sqrt{\Delta}-b}{2a}$; gdy $\Delta = 0$, to pierwiastki są równe (mówimy wtedy o pierwiastku podwójnym), tzn. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

(iii) **postać kanoniczna**: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$;

(iv) **postać iloczynowa (dla $\Delta \geqslant 0$)**: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;

(v) **wierzchołek paraboli**: $W := \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Twierdzenie 1. *Gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ jest nieujemny, to pierwiastki x_1, x_2 tegoż trójmianu czynią zadość tzw. wzorom Viete'a:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Definicja 4. Niech $f\colon X \to Z$, $X, Z \subset \mathbb{R}$ będzie funkcją. Powiemy, że f jest:

(i) **rosnąca**, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) < f(y)$;

(ii) **malejąca**, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) > f(y)$;

(iii) **niemalejąca**, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \leqslant f(y)$;

(iv) **nierosnąca**, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \geqslant f(y)$;

(v) **różnowartościowa (injektywna)**, gdy równość wartości pociąga równość argumentów, tzn.

$$\forall\, x, y \in X\colon \; f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y;$$

(vi) **„na” (surjektywna)**, gdy zbiór wartości jest całą przeciwdziedziną, tzn. $f(\mathcal{D}_f) = \mathcal{D}_f^{-1}$;

(vii) **bijektywna**, gdy jest jednocześnie injekcją i surjekcją;

(viii) **okresowa**, gdy istnieje taka dodatnia liczba $T > 0$ (zwana **okresem** funkcji), że

$$\forall\, x \in X\colon \; x + T \in X \,\wedge\, f(x + T) = f(x);$$

(ix) **parzysta**, gdy

$$\forall\, x \in X\colon \; -x \in X \,\wedge\, f(-x) = f(x);$$

(x) **nieparzysta**, gdy

$$\forall\, x \in X\colon \; -x \in X \,\wedge\, f(-x) = -f(x).$$

Przykład 6. Funkcja stała jest okresowa i każda liczba dodatnia jest jej okresem. Tak więc funkcje stałe nie mają okresu podstawowego.

Definicja 5. (i) Niech $a, b > 0, a \neq 1$. Powiemy, że $x \in \mathbb{R}$ jest **logarytmem o podstawie** a **z liczby** b, jeżeli $b = a^x$. Piszemy wówczas

$$x = \log_a b.$$

(ii) **Funkcją wykładniczą** nazywamy odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, +\infty)$, gdzie $a > 0, a \neq 1$.

(iii) **Funkcją logarytmiczną** nazywamy odwzorowanie $(0, +\infty) \ni x \mapsto \log_a x$, gdzie $a > 0, a \neq 1$.

Uwaga 3. Często stosuje się następującą symbolikę:
- $\log = \log_{10}$ – **logarytm dziesiętny**,
- $\lg = \log_2$,
- $\ln = \log_e$ – **logarytm naturalny**.

W ostatnim przypadku $e \approx 2,71$.
W literaturze anglojęzycznej logarytm naturalny oznaczamy symbolem log.

Twierdzenie 2. *Niech $a, b, x, y > 0, a, b \neq 1, k \in \mathbb{N}$. Prawdziwe są następujące własności logarytmu:*
(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ *– logarytm iloczynu,*
(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ *– logarytm ilorazu,*
(3) $\log_a x^k = k \log_a x$ *– logarytm potęgi,*
(4) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ *– zmiana podstawy logarytmu,*
(5) $a^{\log_a x} = x$.

Uwaga 4. Własność (3) jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej k.
Odwrotnością funkcji $x \mapsto a^x$ jest funkcja $x \mapsto \log_a x$, zaś odwrotnością funkcji $x \mapsto \log_a x$ jest funkcja $x \mapsto a^x$.

Przykład 7. Zastosowanie funkcji wykładniczych i logarytmicznych.
- Tempo rozmnażania się bakterii opisuje równanie

$$N(t) = n_0 a^t,$$

  gdzie t oznacza czas, n_0 – liczbę bakterii w chwili początkowej, $N(t)$ – liczbę bakterii w chwili t, zaś $a > 1$ jest parametrem, określanym empirycznie.
- Czas rozpadu substancji radioaktywnych określa równanie

$$y(t) = y_0 e^{-kt},$$

  gdzie t oznacza czas, y_0 – masę substancji w chwili początkowej, $y(t)$ – masę w chwili t, zaś k jest parametrem, określanym empirycznie.
- Krzywa uczenia się, wyrażająca intensywność przyswajanej wiedzy wraz z upływem czasu, wyraża się wzorem

$$y = c - ce^{-kt},$$

  gdzie t oznacza czas, zaś c, k są pewnymi dodatnimi stałymi.
- Wiele zjawisk ekonomicznych, przyrodniczych (w szczególności modele wzrostu) jest bardzo dobrze opisywanych przez tzw. ***krzywą logistyczną*** postaci

$$y = \frac{a}{1 + be^{-kt}},$$

  gdzie a, b, k są pewnymi parametrami wyznaczanymi empirycznie.

- W naukach chemicznych pH substancji wyznacza się ze wzoru

$$pH = \log[H^+],$$

gdzie $[H^+]$ oznacaz ilość jonów wodoru w substancji, wyrażoną w molach na litr.

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Znajdź dziedzinę i zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x) := \frac{2x}{x+1}$.

Uwaga 5. Można też zauważyć, że $g(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$ i zbiór wartości odczytać z wykresu.

Zadanie 2. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(-1, 2)$ i równoległej do OX/OY. Która z nich jest wykresem funkcji?

Uwaga 6. Pierwsza z tych prostych jest wykresem funkcji zmiennej x, danej wzorem $f(x) := 2$, zaś druga zmiennej y, danej wzorem $g(y) := -1$.

Zadanie 3. Znajdź wartość parametru $m \in \mathbb{R}$, dla której iloczyn pierwiastków równania $x^2 - 2mx + m^2 - 4m + 1 = 0$ jest najmniejszy.

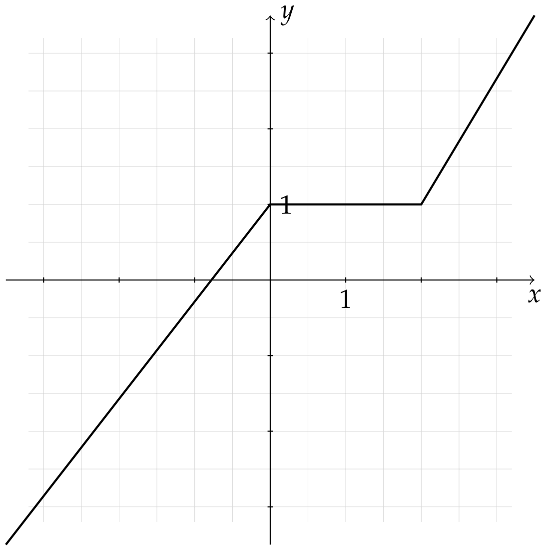
Zadanie 4. Dany jest trójmian $2x^2 - 3x - 7$. Nie wyznaczając jego pierwiastków x_1, x_2 oblicz:
- $x_1^2 + x_2^2$,
- $|x_1 - x_2|$,
- $|x_1|^3 + |x_2|^3$,
- $\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2^2}$.

Zadanie 5. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) := \frac{1}{x}$.

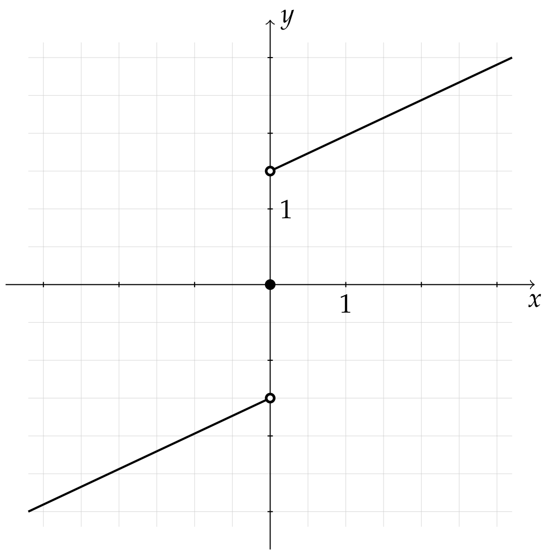
Zadanie 6. Pokaż, że każdą funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można jednoznacznie rozłożyć na sumę funkcji parzystej i nieparzystej.

Uwaga 7. Mamy tu bardzo prosty przykład zadania, którego rozwiązanie polega na wykazaniu istnienia jakiegoś obiektu/rozkładu oraz jego jedyności. Zwykle naturalnym jest rozpocząć od istnienia a następnie wykazać jego jedyność. Tym razem jednak zrobimy odwrotnie, jako że dowodzenie jedyności podpowie nam, jak pokazać istnienie żądanego rozkładu.

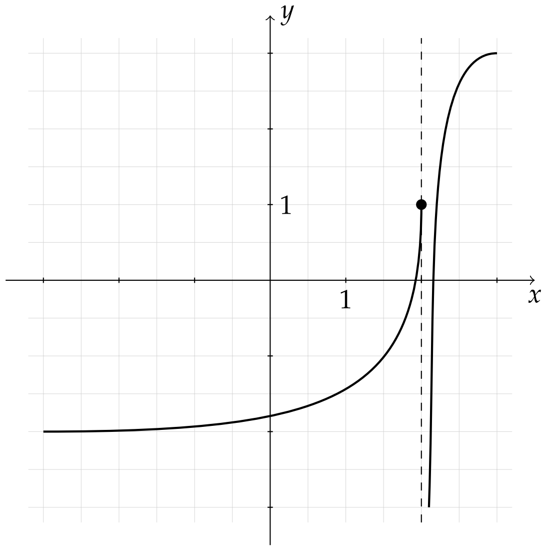
Zadanie 7. Omów monotoniczność, różnowartościowość oraz parzystość funkcji o poniższych wykresach:
a)



b)



c)



Zadanie 8. Narysuj wykresy funkcji wykładniczej i logarytmicznej oraz omów ich monotoniczność.

Zadanie 9. Uprość wyrażenie $\log_{\sqrt[5]{13}} 121 \cdot \log_{11} \sqrt{13}$.

Zadanie 10. Która z liczb jest większa?
(i) $\log 2$ czy $\log 5$,
(ii) $\log_2 7$ czy $\log_7 2$.

Zadanie 11. Znajdź dziedzinę i zbiór wartości funkcji f, określonej wzorem $f(x) := [x]$.

Uwaga 8. Przypomnijmy, że symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x, tzn. $[x]$ jest największą liczbą całkowitą, nieprzekraczającą x.
W treści zadania pojawiły się jednocześnie symbole f oraz $f(x)$. To dobra okazja, aby omówić różnicę pomiędzy nimi. A także wspomnieć o zapisie „anonimowym”, tzn. np. $x \mapsto x + 1$.

Zadanie 12. Podaj wzór funkcji liniowej, która przekształca zbiór liczb całkowitych ujemnych na zbiór liczb całkowitych dodatnich.

Zadanie 13. Podaj równanie prostej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych oraz punkt $(3, 2)$.

Zadanie 14. Podaj wzór funkcji liniowej, która przekształca zbiór wielokrotności liczby 3 na zbiór wielokrotności liczby 4.

Zadanie 15. O funkcji liniowej f wiemy, że $f(2) = 13, f(4) = 23$. Wyznacz $f(10)$.

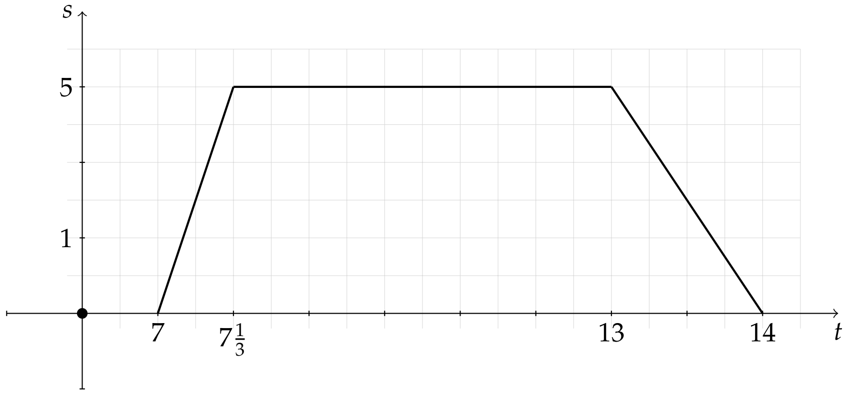
Zadanie 16. Student dojeżdża na uczelnię autobusem a wraca pieszo. Poniższy wykres przedstawia, w jakiej odległości od domu student się znajduje, gdy już wybierze się na uczelnię. „Analizując" wykres odpowiedz na następujące pytania:

(i) ile godzin student spędza na uczelni?

(ii) w jakiej odległości od domu znajduje się uczelnia?

(iii) z jaką prędkością jedzie autobus?

(iv) z jaką prędkością student wraca do domu?



Zadanie 17. Przedyskutuj liczbę rozwiązań równania $x^2 - 6x + 5 = m$ w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$.

Zadanie 18. Pokaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c wielomian

$$W(x) := (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c)$$

ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

Zadanie 19. Czy istnieje takie $p \in \mathbb{R}$, że równanie $x^2 + px + p = 0$ ma dwa pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek:

$$(x_1 + 2x_2)(2x_1 + x_2) = 1 \ ?$$

Zadanie 20. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) := -\frac{x}{x+1}$.

Zadanie 21. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, danej wzorem $f(x) := \frac{x}{x^2+1}$. Sprawdź, czy jest ona różnowartościowa.

Zadanie 22. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2}, & \text{dla } x \neq -2 \\ 2, & \text{dla } x = -2 \end{cases}.$$

Czy f jest injekcją/surjekcją? Gdy f jest bijekcją, znajdź f^{-1}.

Zadanie 23. Zbadaj parzystość poniższych funkcji:
(i) $f(x) := 2\sin x \cos x$,
(ii) $g(x) := \sin x + \cos x$.

Zadanie 24. Pokaż, że iloczyn dwóch funkcji tej samej parzystości jest funkcją parzystą, zaś przeciwnej parzystości funkcją nieparzystą.

Uwaga 9. Bardzo łatwo pokazać, że gdy spośród n funkcji o zadanej parzystości chociaż jedna jest parzysta, to ich złożenie również. Gdy zaś wszystkie są nieparzyste, to ich złożenie również.

Zadanie 25. Pokaż, że jedyną funkcją $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednocześnie parzystą i nieparzystą jest $f \equiv 0$.

Zadanie 26. Zbadaj okresowość funkcji

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Zadanie 27. Zbadaj okresowość poniższych funkcji i znajdź (o ile istnieje) okres podstawowy T:
(i) $2\sin 3x$,
(ii) $\sin x + \operatorname{tg} x$,
(iii) $\sin ax + \cos bx$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Uwaga 10. Rozwiązanie powyższych zadań wymaga pewnej wiedzy o funkcjach trygonometrycznych (i ich ciągłości), którą to wiedzą studenci (przynajmniej formalnie) nie muszą dysponować. Z drugiej strony funkcje te najlepiej nadają się do zadań dotyczących okresowości funkcji. Za najmniej złe rozstrzygnięcie uznajemy powołać się na potrzebną wiedzę i rozwiązać zadanie.

Zadanie 28. Oblicz $\log_{ab} \sqrt{\frac{a}{b}}$, jeżeli wiadomo, że $\log_a b = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 29. Czy funkcje $f(x) := \log \frac{x}{x-1}$ oraz $g(x) := \log x - \log(x-1)$ mają te same dziedziny?

Zadanie 30. Pokaż, że funkcja $f(x) := \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ jest nieparzysta.

Zadanie 31. Uprość wyrażenia:
(i) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$,
(ii) $\left[2^{\sqrt{2}}\right]$,
(iii) $2\log_2 6 - \log_2 9$.

Zadanie 32. Uporządkuj od najmniejszej do największej liczby $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{-\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{2}$.

Zadanie 33. Ile cyfr ma liczba 2^{1000}?

Zadania domowe

Zadanie 34. Znajdź dziedzinę i zbiór wartości funkcji h, określonej wzorem $h(x) := \sqrt{-x}$.

Zadanie 35. Podaj wzór funkcji liniowej, która przekształca zbiór liczb parzystych na zbiór liczb nieparzystych.

Zadanie 36. Podaj wzór prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i nachylonej (do OX) pod kątem $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{3}{4}\pi$.

Zadanie 37. Daną liczbę $a \in \mathbb{R}$ przedstaw, jako sumę dwóch takich liczb, że suma ich kwadratów jest najmniejsza.

Zadanie 38. Wyznacz współczynnik $b \in \mathbb{R}$ w równaniu $x^2 + bx - 8 = 0$ wiedząc, że jedno z rozwiązań jest kwadratem drugiego.

Zadanie 39. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) := \frac{1}{x^2}$.

Zadanie 40. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$.

Zadanie 41. Wykaż, że funkcja

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & \text{dla } x \neq -1 \\ -1, & \text{dla } x = -1 \end{cases}$$

jest swoją własną odwrotnością.

Zadanie 42. Uprość wyrażenie $\log_3 27\sqrt{3}$.

Zadanie 43. Uprość wyrażenia:
(i) $\log_5\left(9^{\log_3 5}\right)$,
(ii) $4^{\log_2 7}$,
(iii) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$.

Zadanie 44. Uporządkuj od najmniejszej do największej liczby $\log_2 3,\ \log_3 \sqrt{2},\ \log_9 8,\ \log_2 \sqrt{3}$.

Literatura

1) J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa, 1994.
2) N. Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla kl. I i II szkół średnich*, WSiP, Warszawa, 1990.
3) N. Dróbka, K. Szymański, *Matematyka w szkole średniej. Powtórzenie i zbiór zadań*, WNT, Warszawa, 2004.
4) Materiały na platformie OLAT.

Wskazówki

1. Dziedzina, to zbiór tych argumentów, dla których wzór funkcji ma sens matematyczny. Przekształć wykres, aby znaleźć zbiór wartości. **2.** Jakie inne punkty znajdują się na tych prostych? **3.** Pamiętaj, że wyróżnik nie może być ujemny. Użyj wzorów Viete'a. **4.** Sprawdź, że wyróżnik jest dodatni i użyj wzorów Viete'a. **5.** Wybierz dwa różne argumenty x, y i sprawdź znak wyrażenia $f(x)-f(y)$. **6.** Zbadaj $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$. **9.** Zmien podstawę logarytmu. **11.** Dziedzina, to zbiór tych argumentów, dla których wzór funkcji ma sens matematyczny. Funkcja zwraca część całkowitą argumentu. Co to mówi o zbiorze wartości? **12.** Co to oznacza graficznie? **13.** Rozwiąż odpowiedni układ równań. **14.** Co to oznacza graficznie? **15.** Funkcja przechodzi przez dwa punkty (jakie?). Rozwiąż odpowiedni układ równań. **17.** Zbadaj znak wyróżnika. **18.** W, to trójmian kwadratowy – jego wyróżnik musi być nieujemny. Potraktuj ten wyróżnik, jako trójmian kwadratowy względem jednego z parametrów. **19.** Sprawdź, kiedy wyróżnik jest nieujemny i użyj wzorów Viete'a. **20.** Znajdź dziedzinę a potem dla dwóch różnych argmentów z dziedziny zbadaj znak różnicy wartości funkcji w tych punktach. **21.** Jak się sprawdza różnowartościowość? Dla jakich y równanie $f(x) = y$ ma rozwiązanie? **22.** Co oznaczają własności, o które pytamy? **23.** Co oznacza parzystość? **25.** Definicje obu pojęć prowadzą do dwóch równań. **28.** $ab = \ldots,\ \frac{a}{b} = \ldots$? **29.** Dla jakich argumentów funkcja log jest zdefiniowana? **30.** Pokaż, że dziedzina jest zbiorem symetrycznym względem 0. Potem przekształć $\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-1}$. **33.** Ile potęg 10 mieści się w rozważanej liczbie? **34.** Dziedzina, to zbiór tych argumentów, dla których wzór funkcji ma sens matematyczny. Jaki znak ma $h(x)$? **35.** Co to oznacza graficznie? **36.** Wyznacz współczynnik kierunkowy. **37.** Musisz znaleźć wierzchołek pewnego trójmianu kwadratowego. **38.** Wzory Viete'a. **39.** Wyznacz dziedzinę. Potem dla dwóch różnych argumentów z dziedziny zbadaj znak różnicy wartości funkcji w tych punktach. **40.** Wyznacz dziedzinę. Potem dla dwóch różnych argumentów z dziedziny zbadaj znak różnicy wartości funkcji w tych punktach. **43.** Skorzystaj z własności logarytmów.

Odpowiedzi

1. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ g(\mathcal{D}_g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **2.** $OX\colon\ y = 2,\ \ OY\colon\ x = -1$. **3.** $m = 2$. **4.** $x_1^2 + x_2^2 = \frac{37}{4}$; $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{65}}{2}$; $|x_1|^3 + |x_2|^3 = \frac{23\sqrt{65}}{8}$; $\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2^2} = \frac{6}{49}$. **7.** a) niemalejąca, nieróżnowartościowa, ani parzysta, ani nieparzysta. **7.** b) rosnąca, różnowartościowa, nieparzysta. **7.** c) przedziałami rosnąca, nieróżnowartościowa, ani parzysta, ani nieparzysta. **9.** 5 **10.** (i) $\log 2 < \log 5$, (ii) $\log_2 7 > \log_7 2$. **11.** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R},\ f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{Z}$. **12.** $y = -x$. **13.** $a = \frac{2}{3},\ b = 0$. **14.** $y = \frac{4}{3}x$. **15.** $f(10) = 53$. **16.** (i) 5 godz. 40 min., (ii) 5 km, (iii) 15 km/h, 5 km/h. **17.** Dwa rozw. dla $m > -4$, jedno rozw. dla $m = -4$, zero rozw. dla $m < -4$. **19.** $p = -1$. **20.** Rozważana funkcja jest malejąca przedziałami na $(-\infty, -1)$ oraz $(-1, +\infty)$. **21.** f nie jest injekcją oraz $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. **22.** Funkcja f jest bijekcją i $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x-2}, & \text{dla } x \neq 2 \\ -2, & \text{dla } x = 2 \end{cases}$. **23.** (i) nieparzysta, (ii) ani parzysta, ani nieparzysta. **26.** Każda liczba wymierna jest okresem rozważanej funkcji. Nie ma okresu podstawowego. **27.** (i) $T = \frac{2}{3}\pi$, (ii) $T = 2\pi$, (iii) $T = \frac{2\pi}{\mathrm{NWD}(|a|,|b|)}$. **29.** Nie. **31.** (i) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$, (ii) $\left[2^{\sqrt{2}}\right] = 2$, (iii) $2\log_2 6 - \log_2 9 = 2$. **32.** $\sqrt{2}^{-\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{2} < 2^{\sqrt{2}}$. **33.** 2^{1000} ma 302 cyfry. **34.** $D_h = (-\infty, 0]$, $h(D_h) = [0, +\infty)$. **35.** $y = x + 1$. **36.** $\frac{\pi}{3} : \ y = \sqrt{3}x$, $\frac{3}{4}\pi : \ y = -x$. **37.** $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. **38.** $b = -2$. **39.** Rosnąca na $(-\infty, 0)$ i malejąca na $(0, +\infty)$. **40.** Malejąca na $(-\infty, -1)$ oraz $(1, +\infty)$, rosnąca na $(-1, 1)$. Nie jest malejąca na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. **42.** $3\frac{1}{2}$. **43.** (i) 2, (ii) 49, (iii) 2. **44.** $\log_3 \sqrt{2} < \log_2 \sqrt{3} < \log_9 8 < \log_2 3$.