Funkcje

Krzysztof Piszczek

Teoria

Definicja 1. Niech dane będą zbiory X oraz Y. **Funkcją** f ze zbioru X do (w) zbiór Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X jednego i tylko jednego elementu zbioru Y. Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f i oznaczamy $\mathcal{D}_f$, zaś Y **przeciwdziedziną** i oznaczamy $\mathcal{D}_f^{-1}$. **Zbiorem wartości** funkcji f nazywamy zbiór $f(\mathcal{D}_f) := \{f(x)\colon\ x \in X\}$. Elementy dziedziny nazywamy **argumentami** funkcji, zaś elementy zbioru wartości **wartościami funkcji**.

Uwagi metodologiczne.
1) Stosujemy zapis $f\colon X \to Y$ i czytamy: „f jest funkcją ze zbioru X do zbioru Y". Powiemy, że dwie funkcje są równe, gdy mają te same dziedziny i dla każdego argumentu z dziedziny przyjmują tą samą wartość. Funkcję można zdefiniować poprzez wzór, tabelę, wykres, graf, zbiór par uporządkowanych bądź też opis słowny.
2) Równość dwóch funkcji można także rozumieć nieco inaczej, mianowicie wymagając dodatkowo równości przeciwdziedzin.

Przykład 1. (i) Funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zdefiniowane wzorami $f(x) := (x+1)^2$ oraz $g(x) := x^2+2x+1$ są równe.
(ii) Funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zdefiniowane wzorami $f(x) := \sqrt{x^2}$ oraz $g(x) := x$ nie są równe.
(iii) Funkcje $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ są równe bądź różne, w zależności od rozumienia pojęcia równości funkcji – patrz uwagi powyżej.

Przykład 2. Przyporządkowanie każdemu wielomianowi jego wartości w zerze jest odwzorowaniem ze zbioru wielomianów w zbiór liczb rzeczywistych.

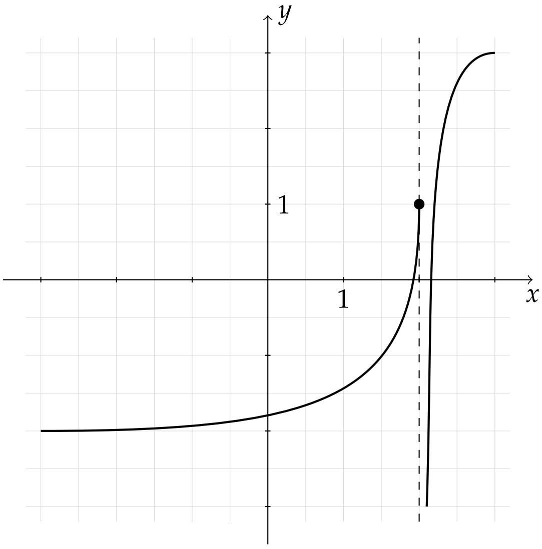
Przykład 3. Na powierzchni sfery wybieramy wielki okrąg i wpisujemy w niego prostokąty. Następnie tworzymy ostrosłupy o podstawie prostokąta, „brakujący" wierzchołek obierając na powierzchni sfery. Każdemu wcześniej ustalonemu prostokątowi przypisujemy objętość tak otrzymanego ostrosłupa. Tak zdefiniowane przyporządkowanie ze zbioru prostokątów wpisanych w okrąg w zbiór liczb dodatnich nie jest funkcją.

Przykład 4. Zbiór par uporządkowanych $\{(3, 15), (7, 2), (8, 13), (8, 17), (\sqrt[3]{254}, 0)\}$ nie definiuje funkcji.

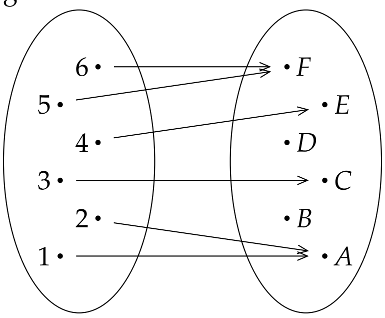
Przykład 5. Sposoby definiowania funkcji.
(i) wzór:
$f(x) := x^2 + \sin x - 3$,
(ii) tabela:

x	$f(x)$
1	15
4	8
5,5	13
$\sqrt[3]{254}$	0

(iii) wykres:



(iv) graf:



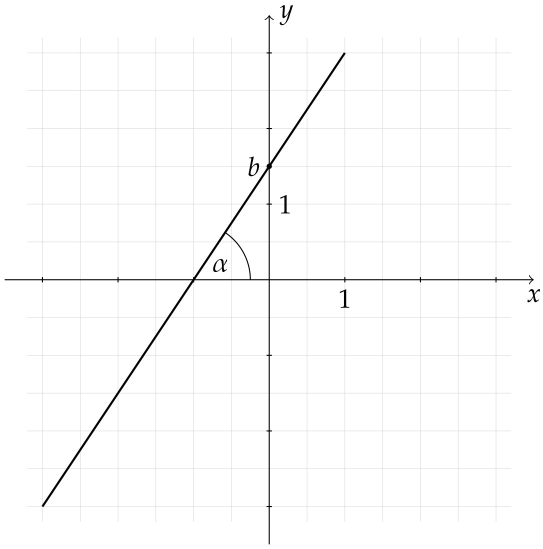
(v) zbiór par uporządkowanych:
$\{(1, 15), (4, 8), (5, 13), (\sqrt[3]{254}, 0)\}$,

(vi) opis słowny:
każdemu wielokątowi na płaszczyźnie przyporządkowujemy jego obwód – odwzorowanie to jest funkcją, której dziedziną jest zbiór wielokątów płaszczyzny, zaś przeciwdziedziną zbiór liczb rzeczywistych.

Uwaga 1. Gdy dziedzina nie jest wyraźnie określona, mamy zawsze na myśli dziedzinę naturalną, tj. największy zbiór, na którym wartość funkcji ma sens matematyczny. Oczywiście zakładamy tutaj, że znamy już przeciwdziedzinę.

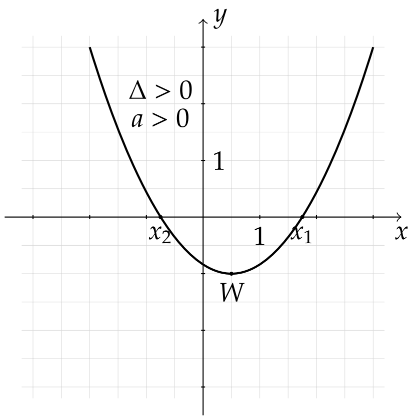
Definicja 2. Funkcja liniowa (afiniczna), to odwzorowanie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dane wzorem $f(x) :=$

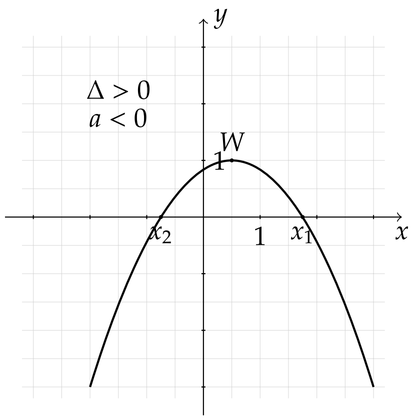
$ax+b,\ \ a,b \in \mathbb{R}$. Parametr a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, zaś b wyrazem wolnym.

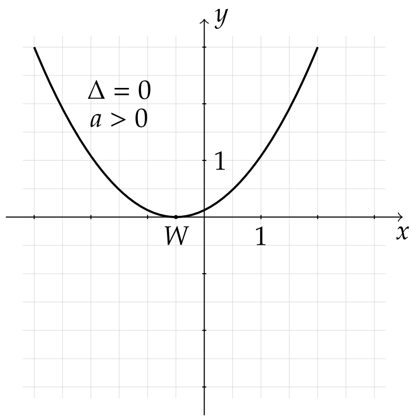


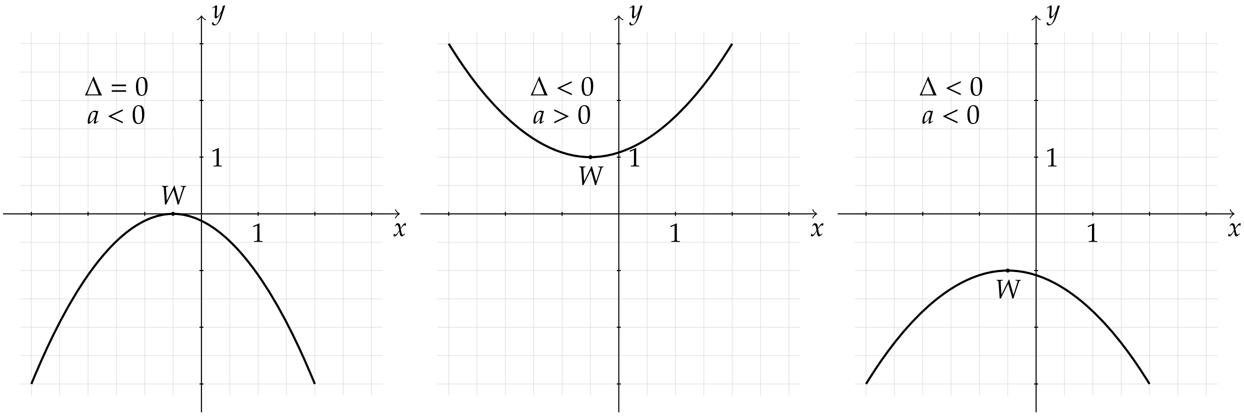
Uwaga 2. Wykresem funkcji liniowej jest prosta, nachylona do osi OX pod kątem $\alpha \in [0,\pi)$ spełniającym równanie $\operatorname{tg}\alpha = a$. Zauważmy, że funkcja liniowa jest jednoznacznie określona przez współczynnik kierunkowy i wyraz wolny. Do tego potrzeba i wystarcza znajomość współrzędnych dwóch punktów, które należą do wykresu funkcji liniowej.
Prostą można przedstawić na wiele sposobów. Oprócz postaci kierunkowej, użytej w definicji, wymienimy jeszcze postać ogólną $Ax + By + C = 0,\ \ A, B, C \in \mathbb{R}$, przy czym zakładamy, że bądź A, bądź B nie jest zerem. Gdy $B = 0$, to równanie $Ax + C = 0$ przedstawia prostą, która nie jest wykresem żadnej funkcji zmiennej x, ale jest wykresem funkcji liniowej zmiennej y.

Definicja 3. Funkcja kwadratowa (trójmian kwadratowy), to odwzorowanie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dane wzorem $f(x) := ax^2+bx+c,\ \ a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Jest to postać ogólna. Wykres trójmianu nazywamy **parabolą**. Poniższe rysunki przedstawiają możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej.









(i) **wyróżnik trójmianu**: $\Delta := b^2 - 4ac$;

(ii) gdy $\Delta \geqslant 0$, to możemy obliczyć **pierwiastki trójmianu**: $x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}-b}{2a}$, $x_2 = \frac{-\sqrt{\Delta}-b}{2a}$; gdy $\Delta = 0$, to pierwiastki są równe (mówimy wtedy o pierwiastku podwójnym), tzn. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

(iii) **postać kanoniczna**: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$;

(iv) **postać iloczynowa (dla $\Delta \geqslant 0$)**: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;

(v) **wierzchołek paraboli**: $W := \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Twierdzenie 1. *Gdy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ jest nieujemny, to pierwiastki x_1, x_2 tegoż trójmianu czynią zadość tzw. wzorom Viete'a:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Definicja 4. Niech $f\colon X \to Z$, $X, Z \subset \mathbb{R}$ będzie funkcją. Powiemy, że f jest:

(i) **rosnąca**, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) < f(y)$;

(ii) **malejąca**, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) > f(y)$;

(iii) **niemalejąca**, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \leqslant f(y)$;

(iv) **nierosnąca**, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ takich, że $x < y$ zachodzi $f(x) \geqslant f(y)$;

(v) **różnowartościowa (injektywna)**, gdy równość wartości pociąga równość argumentów, tzn.

$$\forall\, x, y \in X\colon \ f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y;$$

(vi) **„na" (surjektywna)**, gdy zbiór wartości jest całą przeciwdziedziną, tzn. $f(\mathcal{D}_f) = \mathcal{D}_f^{-1}$;

(vii) **bijektywna**, gdy jest jednocześnie injekcją i surjekcją;

(viii) **okresowa**, gdy istnieje taka dodatnia liczba $T > 0$ (zwana **okresem** funkcji), że

$$\forall\, x \in X\colon \ x + T \in X \ \wedge \ f(x + T) = f(x);$$

(ix) **parzysta**, gdy

$$\forall\, x \in X\colon \ -x \in X \ \wedge \ f(-x) = f(x);$$

(x) **nieparzysta**, gdy

$$\forall\, x \in X\colon \ -x \in X \ \wedge \ f(-x) = -f(x).$$

Uwagi metodologiczne.

1) Własności monotoniczności możemy zdefiniować, zmieniając zwrot nierówności na przeciwny, zarówno pomiędzy argumentami, jak i wartościami funkcji. W istocie chodzi o to, że dla funkcji rosnącej zwrot nierówności jest taki sam dla argumentów i odpowiednich wartości funkcji, zaś dla funkcji malejącej zwroty nierówności są przeciwne.

2) Korzystając z prawa transpozycji możemy różnowartościowość zdefiniować „odwrotnie", tzn. $\forall\, x, y \in X\colon\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
3) Funkcję spełniającą któryś z czterech pierwszych warunków nazywamy **monotoniczną**.
4) Funkcja okresowa ma nieskończenie wiele okresów. Jeżeli wśród nich istnieje najmniejszy, to nazywamy go **okresem podstawowym**.
5) Monotoniczność zwykle badamy następująco: wybieramy dwie dowolne liczby $x < y$ z dziedziny i sprawdzamy znak różnicy $f(x) - f(y)$.
6) Gdy f jest bijekcją, to istnieje taka funkcja $g\colon \mathcal{D}_f^{-1} \to \mathcal{D}_f$, że $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_f^{-1}}$ oraz $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_f}$. Funkcję g nazywamy **odwrotną** do f i oznaczamy f^{-1}.

Przykład 6. Funkcja stała jest okresowa i każda liczba dodatnia jest jej okresem. Tak więc funkcje stałe nie mają okresu podstawowego.

Definicja 5. (i) Niech $a, b > 0, a \neq 1$. Powiemy, że $x \in \mathbb{R}$ jest **logarytmem o podstawie** a **z liczby** b, jeżeli $b = a^x$. Piszemy wówczas

$$x = \log_a b.$$

(ii) **Funkcją wykładniczą** nazywamy odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, +\infty)$, gdzie $a > 0, a \neq 1$.

(iii) **Funkcją logarytmiczną** nazywamy odwzorowanie $(0, +\infty) \ni x \mapsto \log_a x$, gdzie $a > 0, a \neq 1$.

Uwaga 3. Często stosuje się następującą symbolikę:
- $\log = \log_{10}$ – **logarytm dziesiętny**,
- $\lg = \log_2$,
- $\ln = \log_e$ – **logarytm naturalny**.

W ostatnim przypadku $e \approx 2,71$.
W literaturze anglojęzycznej logarytm naturalny oznaczamy symbolem log.

Twierdzenie 2. *Niech $a, b, x, y > 0, a, b \neq 1, k \in \mathbb{N}$. Prawdziwe są następujące własności logarytmu:*
(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ *– logarytm iloczynu,*
(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ *– logarytm ilorazu,*
(3) $\log_a x^k = k \log_a x$ *– logarytm potęgi,*
(4) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ *– zmiana podstawy logarytmu,*
(5) $a^{\log_a x} = x$.

Uwaga 4. Własność (3) jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej k.
Odwrotnością funkcji $x \mapsto a^x$ jest funkcja $x \mapsto \log_a x$, zaś odwrotnością funkcji $x \mapsto \log_a x$ jest funkcja $x \mapsto a^x$.

Przykład 7. Zastosowanie funkcji wykładniczych i logarytmicznych.
- Tempo rozmnażania się bakterii opisuje równanie

$$N(t) = n_0 a^t,$$

gdzie t oznacza czas, n_0 – liczbę bakterii w chwili początkowej, $N(t)$ – liczbę bakterii w chwili t, zaś $a > 1$ jest parametrem, określanym empirycznie.
- Czas rozpadu substancji radioaktywnych określa równanie

$$y(t) = y_0 e^{-kt},$$

gdzie t oznacza czas, y_0 – masę substancji w chwili początkowej, $y(t)$ – masę w chwili t, zaś k jest parametrem, określanym empirycznie.

- Krzywa uczenia się, wyrażająca intensywność przyswajanej wiedzy wraz z upływem czasu, wyraża się wzorem
$$y = c - ce^{-kt},$$
gdzie t oznacza czas, zaś c, k są pewnymi dodatnimi stałymi.
- Wiele zjawisk ekonomicznych, przyrodniczych (w szczególności modele wzrostu) jest bardzo dobrze opisywanych przez tzw. ***krzywą logistyczną*** postaci
$$y = \frac{a}{1 + be^{-kt}},$$
gdzie a, b, k są pewnymi parametrami wyznaczanymi empirycznie.
- W naukach chemicznych pH substancji wyznacza się ze wzoru
$$pH = \log[H^+],$$
gdzie $[H^+]$ oznacaz ilość jonów wodoru w substancji, wyrażoną w molach na litr.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Znajdź dziedzinę i zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x) := \frac{2x}{x+1}$.
Wskazówka: Dziedzina, to zbiór tych argumentów, dla których wzór funkcji ma sens matematyczny. Przekształć wykres, aby znaleźć zbiór wartości.

Szkic rozwiązania. Szukając dziedziny, musimy wykluczyć miejsca zerowe mianownika. Tak więc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Aby znaleźć zbiór wartości, musimy rozwiązać równanie
$$\frac{2x}{x+1} = y$$
z niewiadomą x. Dostajemy $x = \frac{y}{2-y}$, co ma sens dokładnie wtedy, gdy $y \neq 2$. Tym samym $g(\mathcal{D}_g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Odpowiedź: $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g(\mathcal{D}_g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Uwaga 5. Można też zauważyć, że $g(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$ i zbiór wartości odczytać z wykresu.

Zadanie 2. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(-1, 2)$ i równoległej do OX/OY. Która z nich jest wykresem funkcji?
Wskazówka: Jakie inne punkty znajdują się na tych prostych?
Odpowiedź: $OX\colon\ y = 2,\quad OY\colon\ x = -1$.

Uwaga 6. Pierwsza z tych prostych jest wykresem funkcji zmiennej x, danej wzorem $f(x) := 2$, zaś druga zmiennej y, danej wzorem $g(y) := -1$.

Zadanie 3. Znajdź wartość parametru $m \in \mathbb{R}$, dla której iloczyn pierwiastków równania $x^2 - 2mx + m^2 - 4m + 1 = 0$ jest najmniejszy.
Wskazówka: Pamiętaj, że wyróżnik nie może być ujemny. Użyj wzorów Viete'a.

Szkic rozwiązania. Zakładając, że $\Delta \geqslant 0$ i korzystając ze wzorów Viete'a minimalizujemy wyrażenie $m^2 - 4m + 1$, czyli wyznaczamy wierzchołek tejże paraboli.
Odpowiedź: $m = 2$.

Zadanie 4. Dany jest trójmian $2x^2 - 3x - 7$. Nie wyznaczając jego pierwiastków x_1, x_2 oblicz:

- $x_1^2 + x_2^2$,
- $|x_1 - x_2|$,
- $|x_1|^3 + |x_2|^3$,
- $\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2^2}$.

Wskazówka: Sprawdź, że wyróżnik jest dodatni i użyj wzorów Viete'a.

Szkic rozwiązania. Wykorzystamy wzory Viete'a (bo $\Delta \geqslant 0$). Po pierwsze, dzięki nim wiemy, że jeden pierwiastek x_1 jest dodatni a drugi x_2 ujemny.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{37}{4};$$

$$|x_1 - x_2| = x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{65}}{2};$$

$$|x_1|^3 + |x_2|^3 = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \frac{23\sqrt{65}}{8};$$

$$\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2^2} = \frac{x_1 + x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{6}{49}.$$

Odpowiedź: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{37}{4}$; $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{65}}{2}$; $|x_1|^3 + |x_2|^3 = \frac{23\sqrt{65}}{8}$; $\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2^2} = \frac{6}{49}$.

Zadanie 5. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) := \frac{1}{x}$.
Wskazówka: Wybierz dwa różne argumenty x, y i sprawdź znak wyrażenia $f(x) - f(y)$.

Szkic rozwiązania. Mamy $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. To sugeruje, żeby badać monotoniczność przedziałami. Istotnie, weźmy dwie niezerowe liczby $x < y$. Wtedy

$$f(x) - f(y) = \frac{y - x}{xy}.$$

Dzięki założeniu licznik jest dodatni, natomiast znak mianownika zależy od znaku argumentów (tutaj ingeruje brak zera w dziedzinie). Gdy argumenty są tych samych znaków, to mianownik jest dodatni. Tak więc na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$ funkcja f jest malejąca (powiemy **malejąca przedziałami**). Żeby przekonać się czy jest malejąca w całej dziedzinie, wystarczy wziąć jedną liczbę dodatnią i drugą ujemną. I wtedy łatwo przekonamy się, że f nie jest malejąca w całej dziedzinie.

Zadanie 6. Pokaż, że każdą funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można jednoznacznie rozłożyć na sumę funkcji parzystej i nieparzystej.
Wskazówka: Zbadaj $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

Uwaga 7. Mamy tu bardzo prosty przykład zadania, którego rozwiązanie polega na wykazaniu istnienia jakiegoś obiektu/rozkładu oraz jego jedyności. Zwykle naturalnym jest rozpocząć od istnienia a następnie wykazać jego jedyność. Tym razem jednak zrobimy odwrotnie, jako że dowodzenie jedyności podpowie nam, jak pokazać istnienie żądanego rozkładu.

Szkic rozwiązania. Jedyność. Przypuśćmy, że $f = g + h$ dla pewnej funkcji parzystej g oraz nieparzystej h. Wtedy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy $f(x) = g(x) + h(x)$ oraz $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. Dodając a następnie odejmując stronami powyższe dwa równania otrzymamy

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

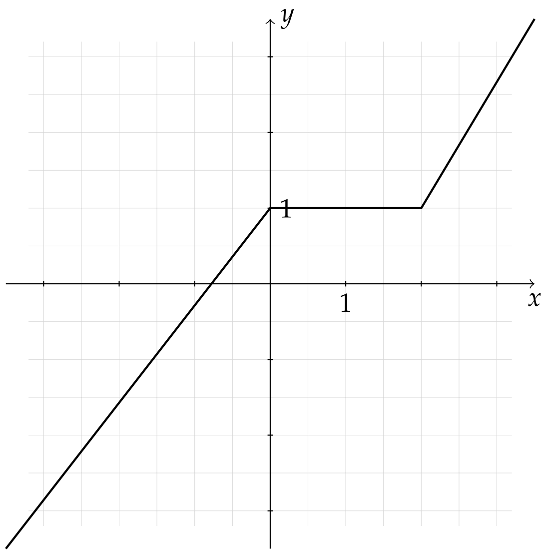
Istnienie.

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

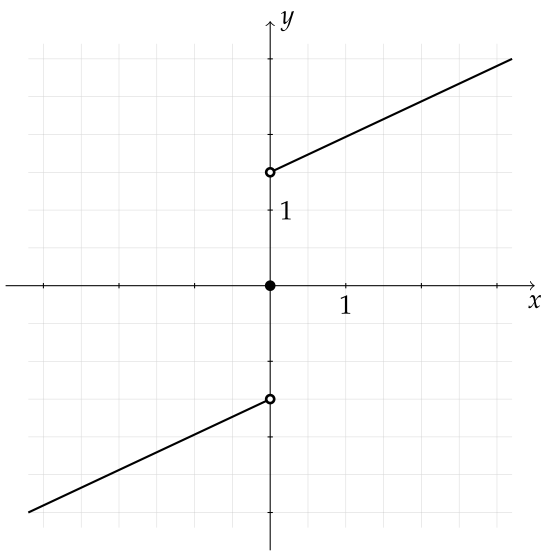
i pierwszy składnik powyższej sumy jest funkcją parzystą, zaś drugi nieparzystą.

Zadanie 7. Omów monotoniczność, różnowartościowość oraz parzystość funkcji o poniższych wykresach:

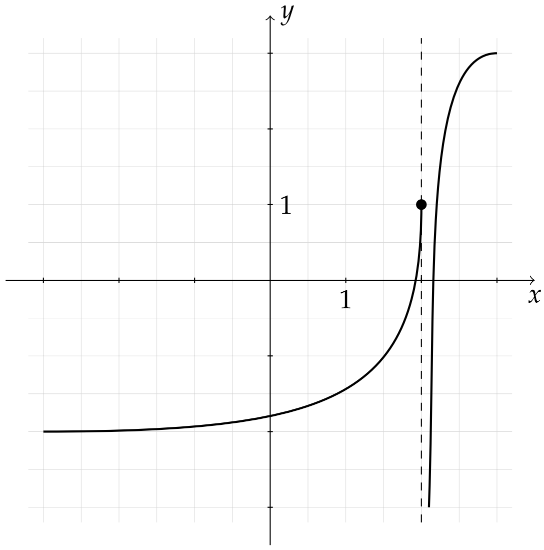
a)



b)



c)



Odpowiedź: a) niemalejąca, nieróżnowartościowa, ani parzysta, ani nieparzysta.

Odpowiedź: b) rosnąca, różnowartościowa, nieparzysta.

Odpowiedź: c) przedziałami rosnąca, nieróżnowartościowa, ani parzysta, ani nieparzysta.

Zadanie 8. Narysuj wykresy funkcji wykładniczej i logarytmicznej oraz omów ich monotoniczność.

Zadanie 9. Uprość wyrażenie $\log_{\sqrt[5]{13}} 121 \cdot \log_{11} \sqrt{13}$.
Wskazówka: Zmien podstawę logarytmu.

Szkic rozwiązania.

$$\log_{\sqrt[5]{13}} 121 \cdot \log_{11} \sqrt{13} = \frac{\log 121}{\log \sqrt[5]{13}} \cdot \frac{\log \sqrt{13}}{\log 11} = \frac{2\log 11}{\frac{1}{5}\log 13} \cdot \frac{\frac{1}{2}\log 13}{\log 11} = 5.$$

Odpowiedź: 5

Zadanie 10. Która z liczb jest większa?
(i) $\log 2$ czy $\log 5$,
(ii) $\log_2 7$ czy $\log_7 2$.
Odpowiedź: (i) $\log 2 < \log 5$, (ii) $\log_2 7 > \log_7 2$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 11. Znajdź dziedzinę i zbiór wartości funkcji f, określonej wzorem $f(x) := [x]$.
Wskazówka: Dziedzina, to zbiór tych argumentów, dla których wzór funkcji ma sens matematyczny. Funkcja zwraca część całkowitą argumentu. Co to mówi o zbiorze wartości?

Szkic rozwiązania. Jako że wyznaczanie części całkowitej ma sens dla każdej liczby rzeczywistej, zatem dziedziną jest cała prosta rzeczywista, tzn. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Na mocy definicji części całkowitej

zbiór wartości jest podzbiorem $\mathbb{Z}$. Jednakże każda liczba całkowita jest częścią całkowitą siebie samej, zatem $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{Z}$.
Odpowiedź: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{Z}$.

Uwaga 8. Przypomnijmy, że symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x, tzn. $[x]$ jest największą liczbą całkowitą, nieprzekraczającą x.
W treści zadania pojawiły się jednocześnie symbole f oraz $f(x)$. To dobra okazja, aby omówić różnicę pomiędzy nimi. A także wspomnieć o zapisie „anonimowym", tzn. np. $x \mapsto x + 1$.

Zadanie 12. Podaj wzór funkcji liniowej, która przekształca zbiór liczb całkowitych ujemnych na zbiór liczb całkowitych dodatnich.
Wskazówka: Co to oznacza graficznie?
Odpowiedź: $y = -x$.

Zadanie 13. Podaj równanie prostej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych oraz punkt $(3, 2)$.
Wskazówka: Rozwiąż odpowiedni układ równań.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy $y = ax + b$. Musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ 2 = a \cdot 3 + b \end{cases} .$$

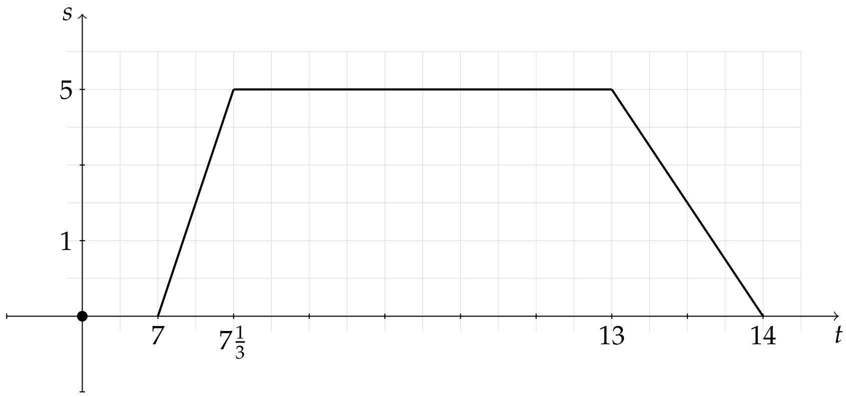
Odpowiedź: $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$.

Zadanie 14. Podaj wzór funkcji liniowej, która przekształca zbiór wielokrotności liczby 3 na zbiór wielokrotności liczby 4.
Wskazówka: Co to oznacza graficznie?
Odpowiedź: $y = \frac{4}{3}x$.

Zadanie 15. O funkcji liniowej f wiemy, że $f(2) = 13, f(4) = 23$. Wyznacz $f(10)$.
Wskazówka: Funkcja przechodzi przez dwa punkty (jakie?). Rozwiąż odpowiedni układ równań.

Szkic rozwiązania. Przez dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta, rozwiązując więc odpowiedni układ równań (liniowych) otrzymujemy wzór $f(x) = 5x + 3$. Tak więc $f(10) = 53$. Możemy też zastosować prostszą metodę. Skoro wzrost argumentu o dwie jednostki (z 2 do 4) spowodował wzrost wartości o 10 jednostek (od 13 do 23), to znaczy, że wzrost argumentu o jednostkę daje wzrost wartości o 5. Tym samym wzrost o 8 jednostek (z 2 do 10) daje wzrost wartości o $8 \cdot 5 = 40$ jednostek. Tym samym $f(10) = f(2) + 40 = 53$.
Odpowiedź: $f(10) = 53$.

Zadanie 16. Student dojeżdża na uczelnię autobusem a wraca pieszo. Poniższy wykres przedstawia, w jakiej odległości od domu student się znajduje, gdy już wybierze się na uczelnię. „Analizując" wykres odpowiedz na następujące pytania:
(i) ile godzin student spędza na uczelni?
(ii) w jakiej odległości od domu znajduje się uczelnia?
(iii) z jaką prędkością jedzie autobus?
(iv) z jaką prędkością student wraca do domu?



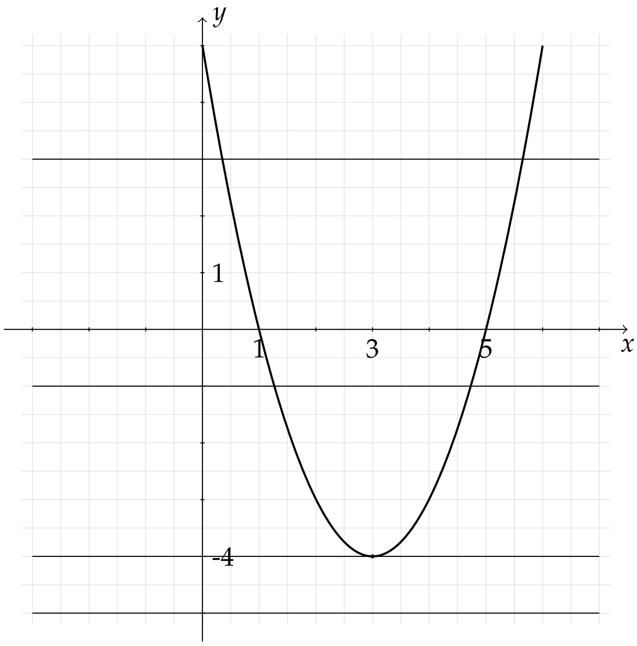
Odpowiedź: (i) 5 godz. 40 min., (ii) 5 km, (iii) 15 km/h, 5 km/h.

Zadanie 17. Przedyskutuj liczbę rozwiązań równania $x^2 - 6x + 5 = m$ w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$.
Wskazówka: Zbadaj znak wyróżnika.

Szkic rozwiązania. Badamy liczbę pierwiastków trójmianu $y = x^2 - 6x + 5 - m$.

$$\Delta = 16 + 4m.$$

Metoda graficzna.



Odpowiedź: Dwa rozw. dla $m > -4$, jedno rozw. dla $m = -4$, zero rozw. dla $m < -4$.

Zadanie 18. Pokaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c wielomian

$$W(x) := (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c)$$

ma co najmniej jedno miejsce zerowe.
Wskazówka: W, to trójmian kwadratowy – jego wyróżnik musi być nieujemny. Potraktuj ten wyróżnik, jako trójmian kwadratowy względem jednego z parametrów.

Szkic rozwiązania. Wielomian W, to w istocie trójmian kwadratowy

$$W(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ac.$$

Chcemy, aby

$$0 \leqslant \Delta = 4(a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc) =: f(a).$$

Ale f też jest trójmianem i zauważmy, że wyróżnik Δ_a tego trójmianu jest niedodatni. Mamy bowiem

$$\Delta_a = (b+c)^2 - 4\Big((b+c)^2 - 3bc\Big) = -3\Big((b+c)^2 - 4bc\Big) = -3(b-c)^2 \leqslant 0.$$

Tym samym W ma co najmniej jeden pierwiastek.

Zadanie 19. Czy istnieje takie $p \in \mathbb{R}$, że równanie $x^2 + px + p = 0$ ma dwa pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek:

$$(x_1 + 2x_2)(2x_1 + x_2) = 1\ ?$$

Wskazówka: Sprawdź, kiedy wyróżnik jest nieujemny i użyj wzorów Viete'a.

Szkic rozwiązania. Po przekształceniach i zastosowaniu wzorów Viete'a mamy

$$1 = (x_1 + 2x_2)(2x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2p^2 + p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2} \vee p = -1.$$

Nasze równanie ma dwa rozwiązania dokładnie wtedy, gdy

$$\Delta = p^2 - 4p \geqslant 0.$$

Rozwiązaniem ostatniej nierówności jest zbiór $p \in \mathbb{R} \setminus (0, 4)$.
Odpowiedź: $p = -1$.

Zadanie 20. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) := -\frac{x}{x+1}$.
Wskazówka: Znajdź dziedzinę a potem dla dwóch różnych argmentów z dziedziny zbadaj znak różnicy wartości funkcji w tych punktach.

Szkic rozwiązania. Po pierwsze, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Weźmy dowolne $x < y \in \mathcal{D}_f$. Wtedy

$$f(x) - f(y) = \frac{y - x}{(x+1)(y+1)}.$$

Ze względu na brak -1 w dziedzinie, podzielimy rozumowanie na dwa przypadki. Niech najpierw $x < y < -1$. Wtedy $f(x) - f(y) > 0$, zatem f jest malejąca. Podobnie dla $-1 < x < y$ funkcja też jest malejąca. Dla $-2 < -1 < 0$ dostajemy $f(-2) - f(0) < 0$, zatem f nie jest malejąca w całej dziedzinie.
Odpowiedź: Rozważana funkcja jest malejąca przedziałami na $(-\infty, -1)$ oraz $(-1, +\infty)$.

Zadanie 21. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, danej wzorem $f(x) := \frac{x}{x^2+1}$. Sprawdź, czy jest ona różnowartościowa.

Wskazówka: Jak się sprawdza różnowartościowość? Dla jakich y równanie $f(x) = y$ ma rozwiązanie?

Szkic rozwiązania. Załóżmy, że $f(x) = f(y)$. Po przekształceniach daje to

$$(x - y)(xy - 1) = 0.$$

Tym samym $f(a) = f(a^{-1})$ dla każdego $a \neq 0$. Zatem f nie jest różnowartościowa. Zbiór wartości naszej funkcji, to zbiór tych $y \in \mathbb{R}$, dla których równanie $f(x) = y$ ma rozwiązanie. Musimy więc sprawdzić, kiedy równanie

$$\frac{x}{x^2 + 1} = y$$

ma rozwiązanie. Po przekształceniach dostajemy

$$yx^2 - x + y = 0.$$

Powyższe równanie ma rozwiązanie, gdy wyróżnik tego trójmianu jest nieujemny, a tak jest dla $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Odpowiedź: f nie jest injekcją oraz $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Zadanie 22. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2}, & \text{dla } x \neq -2 \\ 2, & \text{dla } x = -2 \end{cases}.$$

Czy f jest injekcją/surjekcją? Gdy f jest bijekcją, znajdź f^{-1}.

Wskazówka: Co oznaczają własności, o które pytamy?

Szkic rozwiązania. (i) Injektywność. Jeżeli $f(x) = f(y)$, to albo obie wartości wynoszą 2 i wtedy oba argumenty wynoszą -2, albo

$$\frac{2x + 1}{x + 2} = \frac{2y + 1}{y + 2} \quad \text{dla } x, y \neq -2.$$

Po elementarnych przekształceniach dostajemy $x = y$. Tak więc f jest różnowartościowa.

(ii) Surjektywność. Jeżeli $y = 2$, to $f(-2) = 2$. Jeżeli $y \neq 2$, to rozwiązujemy równanie

$$\frac{2x + 1}{x + 2} = y.$$

Otrzymujemy $x = \frac{1-2y}{y-2}$. Zatem f jest surjekcją.

(iii) Bijektywność. Powyższe podpunkty pokazują, że istnieje funkcja odwrotna f^{-1} i

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x-2}, & \text{dla } x \neq 2 \\ -2, & \text{dla } x = 2 \end{cases}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest bijekcją i $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{x-2}, & \text{dla } x \neq 2 \\ -2, & \text{dla } x = 2 \end{cases}$.

Zadanie 23. Zbadaj parzystość poniższych funkcji:

(i) $f(x) := 2\sin x \cos x$,
(ii) $g(x) := \sin x + \cos x$.
Wskazówka: Co oznacza parzystość?

Szkic rozwiązania. Łatwo zauważyć, że f jest funkcją nieparzystą, zaś $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $-g\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
Odpowiedź: (i) nieparzysta, (ii) ani parzysta, ani nieparzysta.

Zadanie 24. Pokaż, że iloczyn dwóch funkcji tej samej parzystości jest funkcją parzystą, zaś przeciwnej parzystości funkcją nieparzystą.

Szkic rozwiązania. Gdy f, g są nieparzyste, to $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$. Podobnie w pozostałych przypadkach.

Uwaga 9. Bardzo łatwo pokazać, że gdy spośród n funkcji o zadanej parzystości chociaż jedna jest parzysta, to ich złożenie również. Gdy zaś wszystkie są nieparzyste, to ich złożenie również.

Zadanie 25. Pokaż, że jedyną funkcją $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jednocześnie parzystą i nieparzystą jest $f \equiv 0$.
Wskazówka: Definicje obu pojęć prowadzą do dwóch równań.

Szkic rozwiązania. Chcemy, aby jednocześnie (dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$)

$$f(-x) = f(x) \quad \text{oraz} \quad f(-x) = -f(x).$$

To daje $f(x) = -f(x)$ i ostatecznie $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 26. Zbadaj okresowość funkcji

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Odpowiedź: Każda liczba wymierna jest okresem rozważanej funkcji. Nie ma okresu podstawowego.

Zadanie 27. Zbadaj okresowość poniższych funkcji i znajdź (o ile istnieje) okres podstawowy T:
(i) $2\sin 3x$,
(ii) $\sin x + \operatorname{tg} x$,
(iii) $\sin ax + \cos bx$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Uwaga 10. Rozwiązanie powyższych zadań wymaga pewnej wiedzy o funkcjach trygonometrycznych (i ich ciągłości), którą to wiedzą studenci (przynajmniej formalnie) nie muszą dysponować. Z drugiej strony funkcje te najlepiej nadają się do zadań dotyczących okresowości funkcji. Za najmniej złe rozstrzygnięcie uznajemy powołać się na potrzebną wiedzę i rozwiązać zadanie.

Szkic rozwiązania. Rozwiążemy przykład drugi. Po pierwsze, okresem podstawowym funkcji sin jest 2π, zaś funkcji tg π. Tym samym 2π jest okresem rozważanej funkcji. Załóżmy teraz, że dla pewnego $t \in (0, 2\pi)$ zachodzi:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon \quad \sin(x+t) + \operatorname{tg}(x+t) = \sin x + \operatorname{tg} x.$$

Korzystając z zależności $\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y}$ i dokonując odpowiednich przekształceń otrzymujemy

$$(\sin x - \sin(x+t))(\cos x \cos(x+t) + 1) = 0.$$

Ciągłość rozważanych funkcji daje

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \ \cos x \cos(x+t) = -1 \quad \text{lub} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}: \ \sin x = \sin(x+t).$$

Ale dla $x = -\frac{t}{2}$ „lewy” warunek prowadzi do równości $\cos^2 \frac{t}{2} = -1$, czyli jest nieprawdziwy. Tym samym zachodzi warunek „prawy” i t staje się okresem funkcji sin. Ale $t < 2\pi$ i znowu mamy sprzeczność. Ostatecznie 2π jest okresem podstawowym rozważanej funkcji.
Odpowiedź: (i) $T = \frac{2}{3}\pi$, (ii) $T = 2\pi$, (iii) $T = \frac{2\pi}{\mathrm{NWD}(|a|,|b|)}$.

Zadanie 28. Oblicz $\log_{ab} \sqrt{\frac{a}{b}}$, jeżeli wiadomo, że $\log_a b = -\frac{1}{2}$.
Wskazówka: $ab = \ldots$, $\frac{a}{b} = \ldots$?

Szkic rozwiązania. Z założenia wynika, że $b = a^{-\frac{1}{2}}$, zatem $ab = \sqrt{a}$, zaś $\frac{a}{b} = a^{\frac{3}{2}}$. Stąd

$$\log_{ab} \sqrt{\frac{a}{b}} = \log_{\sqrt{a}} a^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Zadanie 29. Czy funkcje $f(x) := \log \frac{x}{x-1}$ oraz $g(x) := \log x - \log(x-1)$ mają te same dziedziny?
Wskazówka: Dla jakich argumentów funkcja log jest zdefiniowana?

Szkic rozwiązania.

$$D_f: \quad \frac{x}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$
$$D_g: \quad x > 0 \wedge x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (1, +\infty).$$

Odpowiedź: Nie.

Zadanie 30. Pokaż, że funkcja $f(x) := \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ jest nieparzysta.
Wskazówka: Pokaż, że dziedzina jest zbiorem symetrycznym względem 0. Potem przekształć $\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-1}$.

Szkic rozwiązania. Po pierwsze, $D_f = \mathbb{R}$. Po drugie,

$$f(-x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-1} = -f(x).$$

Zadanie 31. Uprość wyrażenia:
(i) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$,
(ii) $\left[2^{\sqrt{2}}\right]$,
(iii) $2\log_2 6 - \log_2 9$.
Odpowiedź: (i) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$, (ii) $\left[2^{\sqrt{2}}\right] = 2$, (iii) $2\log_2 6 - \log_2 9 = 2$.

Zadanie 32. Uporządkuj od najmniejszej do największej liczby $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{-\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^2$.
Odpowiedź: $\sqrt{2}^{-\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^2 < 2^{\sqrt{2}}$.

Zadanie 33. Ile cyfr ma liczba 2^{1000}?
Wskazówka: Ile potęg 10 mieści się w rozważanej liczbie?

Szkic rozwiązania. Mówiąc obrazowo, należy sprawdzić, ile potęg 10 mieści się w rozważanej liczbie. Dokładnie, jeżeli k oznacza liczbę cyfr, to zachodzą nierówności

$$10^{k-1} \leqslant 2^{1000} < 10^k.$$

Tym samym $k = [\log 2^{1000} + 1]$. Ponieważ $\log 2 \approx 0,30103$, zatem $k = 302$.
Odpowiedź: 2^{1000} ma 302 cyfry.

Zadania domowe

Zadanie 34. Znajdź dziedzinę i zbiór wartości funkcji h, określonej wzorem $h(x) := \sqrt{-x}$.
Wskazówka: Dziedzina, to zbiór tych argumentów, dla których wzór funkcji ma sens matematyczny. Jaki znak ma $h(x)$?
Odpowiedź: $D_h = (-\infty, 0]$, $h(D_h) = [0, +\infty)$.

Zadanie 35. Podaj wzór funkcji liniowej, która przekształca zbiór liczb parzystych na zbiór liczb nieparzystych.
Wskazówka: Co to oznacza graficznie?
Odpowiedź: $y = x + 1$.

Zadanie 36. Podaj wzór prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i nachylonej (do OX) pod kątem $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{3}{4}\pi$.
Wskazówka: Wyznacz współczynnik kierunkowy.
Odpowiedź: $\frac{\pi}{3}: \ y = \sqrt{3}x$, $\ \frac{3}{4}\pi: \ y = -x$.

Zadanie 37. Daną liczbę $a \in \mathbb{R}$ przedstaw, jako sumę dwóch takich liczb, że suma ich kwadratów jest najmniejsza.
Wskazówka: Musisz znaleźć wierzchołek pewnego trójmianu kwadratowego.
Odpowiedź: $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$.

Zadanie 38. Wyznacz współczynnik $b \in \mathbb{R}$ w równaniu $x^2 + bx - 8 = 0$ wiedząc, że jedno z rozwiązań jest kwadratem drugiego.
Wskazówka: Wzory Viete'a.
Odpowiedź: $b = -2$.

Zadanie 39. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) := \frac{1}{x^2}$.
Wskazówka: Wyznacz dziedzinę. Potem dla dwóch różnych argumentów z dziedziny zbadaj znak różnicy wartości funkcji w tych punktach.
Odpowiedź: Rosnąca na $(-\infty, 0)$ i malejąca na $(0, +\infty)$.

Zadanie 40. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$.
Wskazówka: Wyznacz dziedzinę. Potem dla dwóch różnych argumentów z dziedziny zbadaj znak różnicy wartości funkcji w tych punktach.
Odpowiedź: Malejąca na $(-\infty, -1)$ oraz $(1, +\infty)$, rosnąca na $(-1, 1)$. Nie jest malejąca na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Zadanie 41. Wykaż, że funkcja

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & \text{dla } x \neq -1 \\ -1, & \text{dla } x = -1 \end{cases}$$

jest swoją własną odwrotnością.

Zadanie 42. Uprość wyrażenie $\log_3 27\sqrt{3}$.
Odpowiedź: $3\frac{1}{2}$.

Zadanie 43. Uprość wyrażenia:
(i) $\log_5\left(9^{\log_3 5}\right)$,
(ii) $4^{\log_2 7}$,
(iii) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$.
Wskazówka: Skorzystaj z własności logarytmów.
Odpowiedź: (i) 2, (ii) 49, (iii) 2.

Zadanie 44. Uporządkuj od najmniejszej do największej liczby $\log_2 3,\ \log_3 \sqrt{2},\ \log_9 8,\ \log_2 \sqrt{3}$.
Odpowiedź: $\log_3 \sqrt{2} < \log_2 \sqrt{3} < \log_9 8 < \log_2 3$.

Literatura

1) J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa, 1994.
2) N. Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla kl. I i II szkół średnich*, WSiP, Warszawa, 1990.
3) N. Dróbka, K. Szymański, *Matematyka w szkole średniej. Powtórzenie i zbiór zadań*, WNT, Warszawa, 2004.
4) Materiały na platformie OLAT.