Zastosowanie symboli Σ i Π do zapisu sum i iloczynów

Teoria

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dowolnymi liczbami. Sumę $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ zapisuje się zazwyczaj w postaci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(czytaj: suma od $k = 1$ do n a_k). Znak Σ to duża grecka litera sigma, symbol k to tzw. wskaźnik sumowania, liczba 1 to dolny wskaźnik sumowania, a liczba n to górny wskaźnik sumowania.

Prawdziwe są np. równości:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55,$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 6 + 4 + 3}{12} = \frac{25}{12}.$$

Wskaźnik sumowania można oznaczać dowolną literą. Mamy np.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{r=1}^{n} a_r.$$

Ponadto wskaźniki sumowania dolny m i górny n mogą być dowolnymi liczbami całkowitymi takimi, że $m \leqslant n$. Mamy np.

$$\sum_{k=4}^{8} (2k + 1) = 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 65$$

oraz

$$\sum_{k=-2}^{4} k^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 91.$$

Przekształcając wyrażenia zawierające sumy o dowolnej liczbie składników, korzysta się z ważnych własności takich sum. Przedstawimy tu najważniejsze z nich.

Własność 1. Dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n, c$ zachodzi równość

$$c \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} c a_k.$$

Powyższa własność wynika z rozdzielności mnożenia względem dodawania liczb.

Własność 2. Dla dowolnych liczb całkowitych r, s, t spełniających warunek $r \leqslant s < t$ zachodzi równość

$$\sum_{k=r}^{t} a_k = \sum_{k=r}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{t} a_k. \tag{1}$$

Przy powyższych oznaczeniach zachodzą bowiem równości:

$$\sum_{k=r}^{t} a_k = (a_r + \ldots + a_s) + (a_{s+1} + \ldots + a_t) = \sum_{k=r}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{t} a_k.$$

Własność 3. Dla dowolnych liczb $m, n, r \in \mathbb{Z}$ takich, że $m \leqslant n$ zachodzi równość

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \quad = \quad \sum_{k=m+r}^{n+r} a_{k-r}. \tag{2}$$

Przy powyższych oznaczeniach zachodzą bowiem równości:

$$\sum_{k=m+r}^{n+r} a_{k-r} = a_{(m+r)-r} + a_{(m+r+1)-r} + \ldots + a_{(n+r)-r} =$$

$$= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Rozpatrzmy następującą prostokątną tablicę liczb czyli tzw. macierz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Liczby tworzące tę macierz nazywamy jej elementami. Rzędy poziome tej macierzy nazywamy wierszami, a rzędy pionowe nazywamy kolumnami. Każdy element tej macierzy ma dwa indeksy. Pierwszy jest numerem wiersza, w którym znajduje się ten element, a drugi jest numerem kolumny. Dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ suma elementów stojących w i-tym wierszu jest równa

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Wobec tego suma wszystkich elementów macierzy jest równa

$$\sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big).$$

Podobnie dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$ suma elementów stojących w j-tej kolumnie jest równa

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij},$$

a suma wszystkich elementów naszej macierzy jest równa

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \Big).$$

Porównując otrzymane sumy i opuszczając nawiasy, otrzymujemy poniższą

Własność 4. Dla dowolnych liczb naturalnych m i n oraz liczb a_{ij}, gdzie $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}. \tag{3}$$

Powyższy związek można wyrazić następująco: w sumach podwójnych można zmieniać kolejność sumowania. Własność tę mają również sumy potrójne i ogólnie l-krotne, gdzie $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Iloczyn $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ zapisujemy w postaci

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

(czytaj: iloczyn od $k = 1$ do n a_k). Znak Π to duża grecka litera pi, symbol k to tzw. wskaźnik iloczynu, liczba 1 to dolny wskaźnik iloczynu, a liczba n to górny wskaźnik iloczynu.

Mamy np.

$$\prod_{k=1}^{7}(3k+1) = 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22.$$

Prawdziwe są odpowiedniki iloczynowe podanych wyżej własności 1, 2, 3 i 4.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Obliczyć:

a) $\sum_{k=1}^{5} 2^k$; b) $\sum_{j=4}^{6} \frac{1}{j}$.

Odpowiedź: a) 62; b) $\frac{37}{60}$.

Zadanie 2. Za pomocą znaku Σ zapisać następującą sumę:

a) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[5]{5} + \sqrt[6]{6} + \sqrt[7]{7} + \sqrt[8]{8}$;

b) $5! + 6! + 7! + 8! + 9!$.

Odpowiedź: a) Na przykład $\sum_{k=2}^{8} \sqrt[k]{k}$; b) np. $\sum_{k=5}^{9} k!$.

Zadanie 3. Dana jest macierz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Zapisać dane wyrażenie bez użycia symboli Σ i Π:

a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$; b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=1}^{3} a_{ij}$; c) $\displaystyle\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=4-j}^{3} a_{ij}$.

Szkic rozwiązania. Ad a). Zgodnie z przyjętymi umowami zachodzą równości:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} &= \prod_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\Big) = \prod_{i=1}^{3}(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3})\\ &= (a_{11}+a_{12}+a_{13})(a_{21}+a_{22}+a_{23})(a_{31}+a_{32}+a_{33}).\end{aligned}$$

Ad b). Podobnie jak wyżej otrzymujemy równości:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=1}^{3} a_{ij} &= \sum_{j=1}^{3}\Big(\prod_{i=1}^{3} a_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}a_{2j}a_{3j}\\ &= a_{11}a_{21}a_{31}+a_{12}a_{22}a_{32}+a_{13}a_{23}a_{33}.\end{aligned}$$

Ad c). Mamy tu

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=4-j}^{3} a_{ij} &= \prod_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=4-j}^{3} a_{ij}\Big) = \Big(\sum_{i=3}^{3} a_{i1}\Big)\cdot\Big(\sum_{i=2}^{3} a_{i2}\Big)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{i3}\Big)\\ &= a_{31}(a_{22}+a_{32})(a_{13}+a_{23}+a_{33}).\end{aligned}$$

Zadania domowe

Zadanie 4. Obliczyć:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(2k-1)$; b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{5}\frac{i}{i+1}$; c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{8}(-1)^k k^2$.

Odpowiedź: a) 49; b) $\dfrac{61}{20}$ c) 37.

Zadanie 5. Za pomocą znaku Σ zapisać następującą sumę:

a) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$;

b) $a+(a+1)^2+(a+2)^3+\ldots+(a+2n)^{2n+1}$.

Odpowiedź: a) Na przykład $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin kx$; b) np. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(a+k)^{k+1}$.

Zadanie 6. Za pomocą znaku Π zapisać następujący iloczyn $3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100$.

Odpowiedź: Na przyklad $\displaystyle\prod_{k=3}^{100} k$.

Zadanie 7. Sformułować i uzasadnić iloczynowe odpowiedniki własności 1, 2, 3 i 4.

Zadanie 8. Dana jest macierz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Zapisać dane wyrażenie bez użycia symboli Σ i Π:

a) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{3} a_{ij}$; b) $\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$; c) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{i} a_{ij}$; d) $\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=j}^{3} a_{ij}$;

e) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=i}^{3} a_{ij}$; f) $\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$; g) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{4-i} a_{ij}$; h) $\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4-i} a_{ij}$;

i) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=4-i}^{3} a_{ij}$; j) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$; k) $\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=j}^{3} a_{ij}$; l) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=4-i}^{3} a_{ij}$;

ł) $\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=1}^{j} a_{ij}$; m) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3} a_{ij}$; n) $\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=1}^{4-j} a_{ij}$; o) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4-i} a_{ij}$.

Odpowiedź: a) $a_{11}a_{12}a_{13} + a_{21}a_{22}a_{23} + a_{31}a_{32}a_{33}$;
b) $(a_{11} + a_{21} + a_{31})(a_{12} + a_{22} + a_{32})(a_{13} + a_{23} + a_{33})$;
c) $a_{11} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}a_{33}$;
d) $(a_{11} + a_{21} + a_{31})(a_{22} + a_{32})a_{33}$;
e) $a_{11}a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{33}$;
f) $a_{11}(a_{12} + a_{22})(a_{13} + a_{23} + a_{33})$;
g) $a_{11}a_{12}a_{13} + a_{21}a_{22} + a_{33}$;
h) $(a_{11} + a_{21} + a_{31})(a_{12} + a_{22})a_{13}$;
i) $a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{31}a_{32}a_{33}$;
j) $a_{11}(a_{21} + a_{22})(a_{31} + a_{32} + a_{33})$;
k) $a_{11}a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{33}$;
l) $a_{13}(a_{22} + a_{23})(a_{31} + a_{32} + a_{33})$;
ł) $a_{11} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23}a_{33}$;
m) $(a_{11} + a_{12} + a_{13})(a_{22} + a_{23})a_{33}$;
n) $a_{11}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{22} + a_{13}$;
o) $(a_{11} + a_{12} + a_{13})(a_{21} + a_{22})a_{31}$.

Zadanie 9. Dana jest macierz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$. Dane wyrażenie zapisać za pomocą symboli Σ i Π:

a) $(a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14})(a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24})(a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34})$;
b) $(a_{11} + a_{21} + a_{31})(a_{12} + a_{22} + a_{32})(a_{13} + a_{23} + a_{33})(a_{14} + a_{24} + a_{34})$;
c) $a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} + a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} + a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}$;
d) $a_{11}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{22}a_{32} + a_{13}a_{23}a_{33} + a_{14}a_{24}a_{34}$.

Odpowiedź: a) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}$; b) $\prod_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$; c) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{4} a_{ij}$; d) $\sum_{j=1}^{4}\prod_{i=1}^{3} a_{ij}$.

Zadanie 10. Dana jest następująca trójkątna tablica liczb:

$$\begin{array}{lllll} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

Sumując dwoma sposobami elementy tej tablicy, wykazać równość

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$$

Zadanie 11. Dana jest następująca tablica liczb:

$$\begin{array}{lllll} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}$$

Sumując dwoma sposobami elementy tej tablicy, wykazać odpowiednią równość.
Odpowiedź: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n-i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=n-j+1}^{n} a_{ij}.$

Indukcja matematyczna

Zasadę indukcji matematycznej (lub też indukcji zupełnej) stosuje się w dowodach licznych twierdzeń.

Twierdzenie 1 (Zasada indukcji matematycznej)**.** *Niech każdej liczbie naturalnej n przyporządkowane będzie zdanie $T(n)$ i niech spełnione będą warunki:*
1^o. *zdanie $T(1)$ jest prawdziwe,*
2^o. *dla każdej liczby naturalnej n ze zdania $T(n)$ wynika zdanie $T(n+1)$.*
Wówczas zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

Zasadę indukcji matematycznej można sugestywnie zilustrować za pomocą odpowiednio ustawionych tabliczek domina.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 12. Stosując zasadę indukcji matematycznej, wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{4}$$

Szkic rozwiązania. W przykładzie tym zdaniem $T(n)$ przyporządkowanym liczbie naturalnej n jest równość (4). Dowód indukcyjny składa się z dwóch kroków, polegających na sprawdzeniu warunków 1^o i 2^o, występujących w zasadzie indukcji.

Krok 1^o. Zdanie $T(1)$ jest prawdziwe, gdyż jest ono równoważne ze zdaniem $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$.

Krok 2^o. Niech n będzie dowolną ustaloną liczbą naturalną i niech zachodzi równość (4). Sprawdzimy, że zachodzi wtedy równość

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \tag{5}$$

którą uzyskuje się w wyniku podstawienia $n \mapsto n+1$ w równości (4). Mamy tu

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady indukcji zupełnej równość (4) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie 13. Za pomocą indukcji matematycznej wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}(2k-1)^3 = -2n(16n^2-3). \tag{6}$$

Szkic rozwiązania. Krok 1^o. Ponieważ $1^3 - 3^3 = -2(16-3)$, więc dla $n = 1$ równość (6) jest prawdziwa.

Krok 2^o. Weźmy dowolną ustaloną liczbę naturalną n i załóżmy, że zachodzi równość (6). Wykażemy, że wtedy zachodzi też równość

$$\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k+1}(2k-1)^3 = -2(n+1)[16(n+1)^2-3]. \tag{7}$$

Obliczenia mogą tu przebiegać następująco:

$$\begin{aligned} L = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k+1}(2k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}(2k-1)^3 + (4n+1)^3 - (4n+3)^3 \\ &= -2n(16n^2-3) + (64n^3+48n^2+12n+1) - (64n^3+144n^2+108n+27) \\ &= -32n^3 - 96n^2 - 90n - 26. \end{aligned}$$

Skorzstaliśmy tu z oczywistej równości $\sum_{k=1}^{2n+2} a_k = \sum_{k=1}^{2n} a_k + a_{2n+1} + a_{2n+2}$. Dalej mamy

$$\begin{aligned} P = -2(n+1)[16(n+1)^2-3] &= -(2n+2)(16n^2+32n+13) \\ &= -32n^3 - 96n^2 - 90n - 26. \end{aligned}$$

Zatem $L = P$. Wykazaliśmy więc, że istotnie z równości (6) wynika równość (7).

Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (6) jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 14. Wykazać, że dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ zachodzi równość

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n \quad = \quad \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \tag{8}$$

Szkic rozwiązania. Ponieważ zachodzą równości

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1 = 1 + x,$$

więc dla $n = 1$ równość (8) jest prawdziwa.

Weźmy dowolną ustaloną liczbę $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że zachodzi równość (8). Wykażemy, że zachodzi wtedy równość

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} \quad = \quad \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}. \tag{9}$$

Mamy

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n) + x^{n+1}$$

$$= \quad \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}.$$

Zatem równość (9) jest prawdziwa.

Na mocy zasady indukcji zupełnej równość (8) jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 15. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \ldots + \frac{1}{2n} \quad > \quad \frac{3}{5}. \tag{10}$$

Szkic rozwiązania. Krok 1^o. Jeśli $n = 3$, to dowodzona nierówność przyjmuje postać

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \quad > \quad \frac{3}{5}.$$

czyli jest równoważna z nierównością $\frac{37}{60} > \frac{36}{60}$. Zatem dla $n = 3$ nierówność (10) jest prawdziwa.

Krok 2^o. Weźmy dowolną liczbę naturalną n spełniającą warunek $n \geqslant 3$ i załóżmy, że zachodzi nierówność (10). Wykażemy, że wtedy

$$\frac{1}{n + 2} + \frac{1}{n + 3} + \ldots + \frac{1}{2n + 2} \quad > \quad \frac{3}{5}. \tag{11}$$

Korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2}\\
&\quad= \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\\
&\quad> \frac{3}{5}+\frac{(2n+2)+(2n+1)-(4n+2)}{(2n+1)(2n+2)}\\
&\quad= \frac{3}{5}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \quad > \quad \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Zatem z nierówności (10) wynika nierówność (11).

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że nierówność (10) zachodzi dla każdego $n \geqslant 3$.

Zadanie 16. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwy jest związek $41 \mid (5\cdot 7^{2n}+8^{n-1})$.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy zdanie $41 \mid (5\cdot 7^{2n}+8^{n-1})$ przez $T(n)$.

Krok 1^o. Sprawdzamy wpierw, że prawdziwe jest zdanie $T(1)$, czyli zdanie $41 \mid (5\cdot 7^{2}+8^{0})$. Ponieważ $5\cdot 7^2+8^0=246=41\cdot 6$, więc zdanie $T(1)$ jest prawdziwe.

Krok 2^o. Weźmy dowolną liczbę naturalną n i załóżmy, że prawdziwe jest zdanie $T(n)$. Wykażemy, że wówczas prawdziwe jest zdanie $T(n+1)$, czyli zdanie $41 \mid (5\cdot 7^{2n+2}+8^{n})$. Na mocy założenia indukcyjnego przy pewnym $k\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $5\cdot 7^{2n}+8^{n-1}=41k$. Wobec tego mamy

$$5\cdot 7^{2n+2}+8^n = 5\cdot 49\cdot 7^{2n}+8\cdot 8^{n-1} = 49\,(5\cdot 7^{2n}+8^{n-1})-41\cdot 8^{n-1}$$

$$= 49\cdot 41k-41\cdot 8^{n-1} = 41\,(49k-8^{n-1}).$$

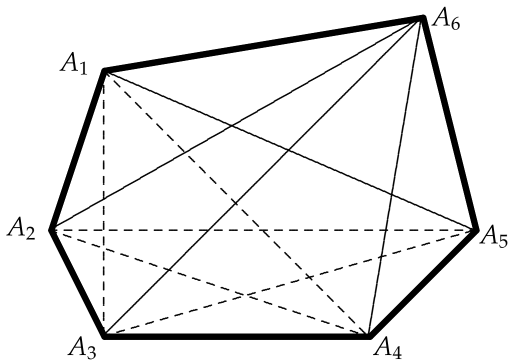
Zatem zdanie $T(n+1)$ jest prawdziwe.

Z zasady indukcji zupełnej wynika, że zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

Zadanie 17. Wykazać, że dla każdego $n\geqslant 3$ liczba P_n wszystkich przekątnych n-kąta wypukłego jest równa $n(n-3)/2$.

Szkic rozwiązania. Ponieważ liczba przekątnych trójkąta jest równa 0, więc dla $n=3$ dowodzona teza jest prawdziwa.

Weźmy dowolną liczbę $n\in\mathbb{N}$ spełniającą warunek $n\geqslant 3$ i załóżmy, że dla każdego n-kąta wypukłego zachodzi równość $P_n=n(n-3)/2$. Rozpatrzmy teraz dowolny wielokąt wypukły $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ o $n+1$ wierzchołkach. Wszystkimi przekątnymi tego wielokąta są przekątne n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$, odcinek A_1A_n i $n-2$ przekątne wychodzące z wierzchołka A_{n+1} (w przypadku, gdy $n = 5$, sytuację przedstawia poniższy rysunek).



Zachodzą więc równości:

$$P_{n+1} = P_n + 1 + (n-2) = \frac{1}{2}n(n-3) + n - 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n-2).$$

Zatem dowodzona równość jest prawdziwa również dla liczby $n+1$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej żądana teza jest prawdziwa dla każdego $n \geqslant 3$.

Uwaga. Rozważaną równość można też udowodnić w następujący sposób nieindukcyjny. Ponieważ z każdego spośród n wierzchołków n-kąta wypukłego można poprowadzić $n-3$ przekątne i przy tym każda z tych przekątnych jest poprowadzona z dwóch wierzchołków, więc zachodzi równość $P_n = n(n-3)/2$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 18. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{12}$$

Szkic rozwiązania. Zdaniem $T(n)$ przyporządkowanym liczbie naturalnej n jest równość (12).

Krok 1^o. Zdanie $T(1)$ jest prawdziwe, gdyż jest ono równoważne ze zdaniem $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Krok 2^o. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech równość (12) będzie prawdziwa. Sprawdzimy, że wówczas prawdziwa też jest równość

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3). \tag{13}$$

Mamy tu

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).
\end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady indukcji zupełnej równość (12) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie 19. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(7k-3)(7k+4)} = \frac{n}{4(7n+4)}. \tag{14}$$

Szkic rozwiązania. Krok 1^o. Teza $T(1)$ jest równoważna ze zdaniem

$$\frac{1}{(7 \cdot 1 - 3)(7 \cdot 1 + 4)} = \frac{1}{4(7 \cdot 1 + 4)}$$

czyli zdanie $T(1)$ jest prawdziwe.

Krok 2^o. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech równość (14) będzie prawdziwa. Sprawdzimy, że wówczas prawdziwa też jest równość

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(7k-3)(7k+4)} = \frac{n+1}{4(7n+11)}. \tag{15}$$

Mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(7k-3)(7k+4)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(7k-3)(7k+4)} + \frac{1}{(7n+4)(7n+11)} \\
&= \frac{n}{4(7n+4)} + \frac{1}{(7n+4)(7n+11)} \\
&= \frac{n(7n+11)+4}{4(7n+4)(7n+11)} \\
&= \frac{7n^2+11n+4}{4(7n+4)(7n+11)} \\
&= \frac{(n+1)(7n+4)}{4(7n+4)(7n+11)} \\
&= \frac{n+1}{4(7n+11)}.
\end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej równość (14) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Uwaga. Zauważmy, że dla znalezienia rozkładu wyrażenia $7n^2 + 11n + 4$ na czynniki nie było trzeba znajdować pierwiastków wielomianu $7X^2 + 11X + 4$. Bowiem z góry wiadomo, że w rozkładzie tego wyrażenia powinien wystąpić pozostający w liczniku czynnik $n + 1$ oraz mający ulec skróceniu czynnik $7n + 4$. Istotnie, zachodzi równość $7n^2 + 11n + 4 = (n + 1)(7n + 4)$.

Zadanie 20. Metodą indukcji zupełnej wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \qquad (x \neq 2k\pi). \tag{16}$$

Uwaga. Tego typu zadania można przerabiać w ramach kursu trygonometrii.

Szkic rozwiązania. Jeśli $n = 1$, to równość (16) jest równoważna ze związkiem $\sin x = \sin x$, a więc jest prawdziwa.

Weźmy dowolną ustaloną liczbę naturalną n i załóżmy, że prawdziwy jest związek (16). Wykażemy, że zachodzi wtedy równość

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+2}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}. \tag{17}$$

Mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx &= \sum_{k=1}^{n} \sin kx + \sin(n+1)x \\
&= \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + \sin(n+1)x \\
&= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left[\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x + \sin(n+1)x \sin \frac{x}{2} \right].
\end{aligned}$$

Korzystając teraz z tożsamości

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

i z wynikającego z niej związku

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

otrzymujemy dalej równości:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right] + \frac{1}{2} \left[\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{3}{2}\right)x \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{3}{2}\right)x \right] \\
&= \frac{\sin \frac{n+2}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że z równości (16) wynika związek (17).

Na mocy zasady indukcji zupełnej równość (16) jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 21. Wykazać, że jeśli $x \geqslant -1$, to dla każdej liczby naturalnej n zachodzi poniższa nierówność, zwana nierównością Bernoulliego

$$(1+x)^n \quad \geqslant \quad 1+nx. \tag{18}$$

Szkic rozwiązania. Krok 1^o. Dla $n = 1$ nierówność Bernoulliego jest równoważna z nierównością $1 + x \geqslant 1 + x$, czyli jest ona prawdziwa.

Krok 2^o. Weźmy dowolną ustaloną liczbę naturalną n i załóżmy, że zachodzi nierówność (18). Mnożąc tę nierówność stronami przez nieujemną liczbę $1 + x$, otrzymujemy związki

$$(1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x.$$

Zatem nierówność Bernoulliego prawdziwa jest też dla liczby naturalnej $n + 1$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej wnioskujemy stąd, że nierówność Bernoulliego (18) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie 22. Metodą indukcji zupełnej wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ prawdziwy jest związek

$$(X^2+X+1) \,|\, [(X+1)^{2n+1}+X^{n+2}]. \tag{19}$$

Szkic rozwiązania. Jeśli $n = 0$, to związek (19) jest równoważny ze zdaniem

$$(X^2+X+1) \,|\, (X^2+X+1), \tag{20}$$

czyli w tym przypadku jest on prawdziwy.

Weźmy dowolną ustaloną liczbę $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i załóżmy, że spełniony jest warunek (19). Oznacza to, że przy pewnym $q(X) \in \mathbb{R}[X]$ zachodzi równość

$$(X+1)^{2n+1}+X^{n+2} \quad = \quad (X^2+X+1)q(X). \tag{21}$$

Wykażemy, że wówczas

$$(X^2+X+1) \,|\, [(X+1)^{2n+3}+X^{n+3}]. \tag{22}$$

Zachodzą równości:

$$\begin{aligned}
(X+1)^{2n+3}+X^{n+3} &= (X+1)^{2n+1}(X+1)^2 + X \cdot X^{n+2} \\
&= [(X+1)^{2n+1}+X^{n+2}](X+1)^2 - (X^2+X+1)X^{n+2} \\
&= (X^2+X+1)q(X)(X+1)^2 - (X^2+X+1)X^{n+2} \\
&= (X^2+X+1)[q(X)(X+1)^2 - X^{n+2}].
\end{aligned}$$

Zatem istotnie prawdziwa jest zależność (22).

Na mocy zasady indukcji zupełnej związek (19) jest prawdziwy dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zadanie 23. Poniższą równość zapisać za pomocą znaków Σ i udowodnić ją przez indukcję:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Szkic rozwiązania. Daną równość można zapisać w postaci

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}. \tag{23}$$

A oto dowód indukcyjny tej równości.

Krok 1^o. Dla $n = 1$ równość (23) jest prawdziwa, gdyż przyjmuje ona wtedy postać $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Krok 2^o. Niech n będzie dowolną ustaloną liczbą naturalną i niech zachodzi równość (23). Wykażemy, że wówczas zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k}. \tag{24}$$

W tym celu dokonujemy następujących przekształceń:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)\\
&= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)\\
&= \left(\sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)\\
&= \sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Zatem istotnie równość (24) jest prawdziwa.

Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (23) jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadania domowe

Zadanie 24. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(10k-3) = n(5n+2)$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+2)(3k+1) = n(n+2)(n+3)$;

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$;

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)} = \frac{n}{5n+1}$;

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k^3 = -n^2(4n+3);$

Zadanie 25. Metodą indukcji matematycznej wykazać równość:

a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \qquad (n \geqslant 2).$

Zadanie 26. Wykazać równość:

a) $\displaystyle\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = \frac{1}{x^2 - 1}\left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2n - 1;$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x \, \sin x}, \qquad (x \neq \frac{1}{2}k\pi).$

Zadanie 27. Metodą indukcji matematycznej wykazać nierówność:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Zadanie 28. Udowodnić związek $25 \mid (2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4)$.

0.1. Zasada minimum (*nadprogramowe!*)

Poniższe twierdzenie jest równoważne z zasadą indukcji matematycznej.

Twierdzenie 2 (Zasada minimum.). *W każdym niepustym podzbiorze zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza.*

Zadania dodatkowe

Zadanie 29. Stosując zasadę minimum, wykazać, że każda liczba naturalna $n > 1$ jest iloczynem liczb pierwszych. (Pojedynczą liczbę pierwszą traktujemy tu jako jednoczynnikowy iloczyn liczb pierwszych.)

Szkic rozwiązania. Przypuśćmy, że zbiór liczb naturalnych większych od 1 i niemających rozkładu na iloczyn liczb pierwszych nie jest pusty i niech n będzie najmniejszą taką liczbą. Ponieważ n nie jest liczbą pierwszą, więc $n = kl$ przy pewnych $k, l \in \mathbb{N}$ takich, że $1 < k < n$, $1 < l < n$. Ponieważ liczby naturalne k i l są większe od 1 i mniejsze od n, więc są one iloczynami liczb pierwszych. Zatem ich iloczyn kl też jest iloczynem liczb pierwszych. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy.

Zadanie 30. „Udowodnić" następujące „twierdzenie": każda liczba naturalna jest ciekawa. *Uwaga.* Poniżej dla każdej spośród liczb naturalnych od 1 do 8 wskazujemy własność świadczącą o tym, że dana liczba naturalna jest ciekawa:

1 – najmniejsza liczba naturalna, jedyna liczba naturalna, która nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną,

2 – najmniejsza liczba pierwsza,

3 – najmniejsza liczba pierwsza nieparzysta; najmniejsza liczba naturalna, która nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych,

4 – najmniejsza liczba złożona,

5 – najmniejsza liczba naturalna będąca sumą kwadratów dwóch różnych liczb naturalnych,

6 – najmniejsza liczba naturalna będąca iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych,

7 – najmniejsza liczba naturalna niebędąca sumą kwadratów trzech liczb całkowitych,

8 – najmniejsza liczba naturalna będąca sześcianem liczby pierwszej.

Szkic rozwiązania. Przypuśćmy, że zbiór tych liczb naturalnych, które nie są ciekawe jest niepusty. Na mocy zasady minimum w zbiorze tym istnieje liczba najmniejsza. Oznaczmy tę liczbę przez n_0. Ale, czy liczba n_0 przez fakt, że jest ona najmniejszą nieciekawą liczbą naturalną, nie staje się ciekawa? Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy.

0.2. Symbol Newtona

Dla każdej liczby naturalnej n liczbę $n!$ (czytaj: n silnia) określamy wzorem

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Przyjmujemy ponadto umowę, że $0! = 1$. W szczególności mamy

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040.$$

Dla każdej liczby naturalnej n i dowolnej liczby całkowitej k takiej, że $0 \leqslant k \leqslant n$ wartość $\binom{n}{k}$ (czytaj: n po k) symbolu Newtona określamy wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Przyjmujemy ponadto umowę, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i k jest liczbą całkowitą ujemną, to $\binom{n}{k} = 0$.

Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ liczba $\binom{n}{k}$ jest równa liczbie wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Ponieważ liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego jest równa 2^n, więc zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{25}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 31. Sprawdzić, że jeśli $0 \leqslant k \leqslant n$, to zachodzi równość

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{(symetria)}. \tag{26}$$

Zadanie 32. Obliczyć:

a) $\binom{16}{3}$; b) $\binom{11}{4}$; c) $\binom{28}{5}$; d) $\binom{57}{49}$.

Odpowiedź: a) 560; b) 330; c) 98 280; d) 1 652 411 475.

Zadanie 33. Wykazać, że jeśli $k, n \in \mathbb{N}$ i $1 \leqslant k \leqslant n$, to zachodzi równość

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{27}$$

Szkic rozwiązania. Przy założeniach twierdzenia mamy

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left[\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right] \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\,\frac{n+1}{(n-k+1)k} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

0.3. Wzór dwumianowy Newtona

Dobrze znamy poniższe wzory na kwadrat sumy i sześcian sumy:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Ich uogólnieniem jest poniższy tzw. wzór dwumianowy Newtona zachodzący dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{28}$$

Równość (28) można też zapisać następująco

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n. \tag{29}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 34. Metodą indukcji matematycznej udowodnić wzór (28).

Szkic rozwiązania. 1^o. Dla $n = 1$ równość (28) Przyjmuje postać $a + b = a + b$. Zatem nasza teza jest prawdziwa dla $n = 1$.

2^o. Załóżmy, że równość (28) jest prawdziwa dla liczby naturalnej n. Wykażemy, że jest ona wtedy prawdziwa dla liczby $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.
\end{aligned}$$

Zatem istotnie z prawdziwości wzoru (28) dla liczby n wynika jego prawdziwość dla liczby $n+1$.

Na mocy zasady indukcji zupełnej równość (28) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Uwagi metodologiczne. Wskazane jest, by prowadzący zajęcia sam przeprowadził powyższy dowód.

Uwaga. Nie wyprowadza się oddzielnego wzoru dla $(a-b)^n$, gdyż różnica $a-b$ też jest sumą. Mianowicie $a-b = a+(-b)$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 35. Rozpatrując wyrażenie $(1+1)^n$, wykazać w sposób algebraiczny równość (25).

Szkic rozwiązania. Z jednej strony mamy $(1+1)^n = 2^n$. Z drugiej zaś, na mocy wzoru dwumianowego Newtona prawdziwe są równości:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Porównując prawe strony otrzymanych równości, uzyskujemy tezę.

0.4. Trójkąt Pascala

Współczynniki występujące w rozwinięciach kolejnych potęg dwumianu można ustawić w formie poniższej tablicy zwanej trójkątem Pascala

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Trójkąt Pascala jest więc następujący

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Na początku i końcu każdego wiersza stoi liczba 1. Każdy inny współczynnik jest na mocy równości (27) równy sumie dwóch współczynników stojących tuż nad nim.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 36. Korzystając z trójkąta Pascala, rozwinąć wyrażenie:

a) $(a+b)^4$; b) $(a+b)^5$.

Odpowiedź: a) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;

b) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Zadania domowe

Zadanie 37. Korzystając z trójkąta Pascala, rozwinąć wyrażenie $(a+b)^6$.

Odpowiedź: $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

0.5. Pewne wzory skróconego mnożenia

Kolejnymi znanymi nam tożsamościami algebraicznymi są równości:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

Ich uogólnieniem jest zachodząca dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ równość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Mamy np.

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + \ldots + ab^3 + b^4).$$

Zauważmy, że jeśli liczba naturalna $n > 1$ jest nieparzysta, to z powyższej tożsamości oraz ze związku $a^n + b^n = a^n - (-b)^n$ otrzymujemy równość

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Mamy np.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2), \\ a^5 + b^5 &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^2). \end{aligned}$$

Literatura

Jeśmianowicz L. i Łoś J. – „Zbiór zadań z algebry”, Warszawa, PWN

Musielak J. – „Wstęp do matematyki”, Warszawa, PWN