Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Jerzy Rutkowski

Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

2. Elementy kombinatoryki

2.1. Permutacje

Teoria

Definicja 1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Permutacją n-elementowego zbioru A nazywamy dowolną funkcję różnowartościową $f : \{1, \ldots, n\} \to A$.

Innymi słowy: permutacją n-elementowego zbioru A nazywamy dowolny n-elementowy ciąg różnych elementów zbioru A.

Uwaga 1. Zamiast mówić o permutacjach n-elementowego zbioru $\{a_1, \ldots, a_n\}$, mówimy też o permutacjach elementów $a_1, \ldots, a_n$.

Przykład 1. Wszystkimi permutacjami zbioru $A = \{a, b, c\}$ są ciągi

$$(a, b, c), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b), \quad (c, b, a).$$

Twierdzenie 1. *Liczba wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest równa $n!$.*

Liczbę wszystkich permutacji zbioru n-elementowego oznacza się czasami przez P_n. Zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi równość

$$P_n \quad = \quad n!. \tag{1}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Wypisać wszystkie permutacje liczb 1, 2 i 3.

Szkic rozwiązania. Wypisując kolejno po dwie permutacje o pierwszym wyrazie 1, o pierwszym wyrazie 2 i o pierwszym wyrazie 3, otrzymujemy wszystkie permutacje liczb 1, 2 i 3. Zatem wszystkimi permutacjami tych liczb są ciągi: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Zadanie 2. Obliczyć liczbę różnych słów (sensownych lub nie), które można uzyskać w wyniku przestawiania liter w słowie sasanka.

Szkic rozwiązania. Odnotujmy wpierw, że siedmioliterowe słowo sasanka tworzą 3 litery a, 2 litery s i po jednej literze k i n. Ponumerujmy kolejne litery tego słowa liczbami od 1 do 7. Liczba permutacji tych numerów jest równa 7!, a każdej takiej permutacji odpowiada pewne słowo utworzone z wyżej wymienionych liter. Jednakże liczba takich permutacji numerów, którym odpowiada to samo słowo jest równa $3! \cdot 2!$. Bowiem dwom permutacjom odpowiada to samo słowo wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 5 (numer litery n) w obu tych permutacjach jest na tym samym miejscu, liczba 6 (numer litery k) jest na tym samym miejscu, zbiory numerów miejsc, na których występują liczby 1 i 3 (numery liter s) są równe oraz zbiory numerów miejsc, na których występują liczby 2, 4 i 7 (numery liter a) są równe. Wynika stąd, że jeśli N oznacza szukaną liczbę słów, to zachodzą równości

$$N = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 420.$$

Zadanie 3. Obliczyć liczbę takich permutacji liter a, b, c, d, e i f, których pierwszym wyrazem jest c.

Szkic rozwiązania. Ponieważ każdą z rozpatrywanych permutacji można utożsamiać z odpowiednią permutacją pięciu liter a, b, d, e i f występujących po literze c, więc szukana liczba permutacji jest równa 5! tj. 120.

Zadania dodatkowe

Zadanie 4. Wypisać wszystkie permutacje liczb 1, 2, 3 i 4.

Szkic rozwiązania. Aby otrzymać wszystkie 24 permutacje liczb 1, 2, 3 i 4, wypisujemy kolejno po sześć permutacji o pierwszym wyrazie 1, o pierwszym wyrazie 2 itd.:

$$\begin{array}{llllll}
(1,2,3,4), & (1,2,4,3), & (1,3,2,4), & (1,3,4,2), & (1,4,2,3), & (1,4,3,2),\\
(2,1,3,4), & (2,1,4,3), & (2,3,1,4), & (2,3,4,1), & (2,4,1,3), & (2,4,3,1),\\
(3,1,2,4), & (3,1,4,2), & (3,2,1,4), & (3,2,4,1), & (3,4,1,2), & (3,4,2,1),\\
(4,1,2,3), & (4,1,3,2), & (4,2,1,3), & (4,2,3,1), & (4,3,1,2), & (4,3,2,1).
\end{array}$$

Zadania domowe

Zadanie 5. Obliczyć liczbę takich permutacji liter a, b, c, d, e i f, które spełniają dany warunek:

a) trzy pierwsze wyrazy tworzą zbiór $\{b, c, d\}$;

b) samogłoski a i e są sąsiednimi wyrazami permutacji.

Odpowiedź: a) 36; b) 240.

2.2. Kombinacje (bez powtórzeń)

Teoria

Definicja 2. Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i niech $k \leqslant n$. k-elementową kombinacją n-elementowego zbioru A nazywamy dowolny k-elementowy podzbiór zbioru A.

Przykład 2. Wszystkimi 2-elementowymi kombinacjami zbioru $A = \{a, b, c, d\}$ są podzbiory:

$$\{a,b\}, \quad \{a,c\}, \quad \{a,d\}, \quad \{b,c\}, \quad \{b,d\}, \quad \{c,d\}.$$

Twierdzenie 2. *Liczba k-elementowych kombinacji n-elementowego zbioru A jest równa $\binom{n}{k}$.*

Liczbę wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego oznacza się często przez C_n^k. Zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi równość

$$C_n^k = \binom{n}{k}. \tag{2}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 6. Obliczyć liczbę sposobów skreślenia kuponu w totolotku.

Szkic rozwiązania. Skreślenie kuponu w totolotku jest równoznaczne z wyborem sześciu spośród 49-ciu liczb. Liczba sposobów skreślenia jest więc równa

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,938\,816.$$

Zadanie 7. Obliczyć liczbę możliwych rozdań przy grze w brydża.

Szkic rozwiązania. Talia do gry w brydża liczy 52 karty. Każdy z czterech graczy otrzymuje po 13 kart. Ponumerujmy graczy liczbami od 1 do 4. Karty można rozdać następująco: najpierw wybieramy 13 kart spośród 52 dla pierwszego gracza (można to uczynić na $\binom{52}{13}$ sposobów), następnie z pozostałych 39-ciu kart wybieramy 13 kart dla drugiego gracza (na $\binom{39}{13}$ sposobów), z kolei spośród 26-ciu pozostałych kart wybieramy 13 kart dla trzeciego gracza (na $\binom{26}{13}$ sposobów), a pozostałe 13 kart dajemy czwartemu graczowi. Łączna liczba rozdań jest więc równa

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}.$$

Zadania dodatkowe

Zadanie 8. W klasie jest 15 dziewcząt i 13 chłopców. Obliczyć, na ile sposobów można skompletowć liczącą dwie dziewczynki i jednego chłopca delegację tej klasy.

Szkic rozwiązania. Spośród piętnastu dziewcząt można wybrać dwie na $\binom{15}{2}$ tj. 105 sposobów, a jednego chłopca spośród trzynastu można wybrać na $\binom{13}{1}$ czyli 13 sposobów. Ponieważ każdy wybór dwóch dziewcząt można skojarzyć z każdym wyborem jednego chłopca, więc liczba sposobów wyboru delegacji jest równa iloczynowi liczby sposobów wyboru dwóch dziewcząt przez liczbę sposobów wyboru jednego chłopca. Jest więc równa $\binom{15}{2}\binom{13}{1}$ tj. $105 \cdot 13$. Wobec tego szukana liczba sposobów wyboru delegacji jest równa 1365.

Zadania domowe

Zadanie 9. W klasie jest 16 dziewcząt i 12 chłopców. Obliczyć, na ile sposobów można skompletowć liczącą trzy dziewczynki i dwóch chłopców delegację tej klasy.
Odpowiedź: 36950.

Zadanie 10. Do dyspozycji n osób grających w tysiąca było k talii kart, przy czym $3k \leqslant n$. Obliczyć liczbę N sposobów wyboru k ponumerowanych zbiorów trójek osób, które będą mogły grać tymi kartami. *Uwaga.* W tysiąca jedną talią grają trzy osoby.
Odpowiedź: $N = \binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-3k+3}{3} = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-3k+1)}{6^k} = \dfrac{n!}{6^k(n-3k)!}$.

2.3. Wariacje bez powtórzeń

Teoria

Definicja 3. Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i niech $k \leqslant n$. k-elementową wariacją bez powtórzeń n-elementowego zbioru A nazywamy dowolną funkcję różnowartościową $f : \{1, \ldots, k\} \to A$.

Innymi słowy: k-elementową wariacją bez powtórzeń n-elementowego zbioru A nazywamy dowolny k-wyrazowy ciąg różnych elementów zbioru A.

Twierdzenie 3. *Liczba k-elementowych wariacji bez powtrzeń n-elementowego zbioru A jest równa* $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Liczbę wszystkich k-elementowych wariacji bez powtrzeń zbioru n-elementowego oznacza się często przez V_n^k. Zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi równość

$$V_n^k \quad = \quad n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1). \tag{3}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 11. Obliczyć liczbę różnych flag utworzonych przez trzy poziome różnokolorowe pasy, których kolory można wybrać spośród 6-ciu kolorów.

Szkic rozwiązania. Szukana liczba flag jest równa liczbie różnoelementowych ciągów (k_1, k_2, k_3), gdzie k_1, k_2, k_3 oznaczają kolory pasów górnego, środkowego i dolnego odpowiednio. Wobec tego liczba takich flag jest równa V_6^3 tj. $6 \cdot 5 \cdot 4$, czyli jest równa 120.

Zadanie 12. Obliczyć liczbę sposobów takiego posadzenia pięciu pań i trzech panów na ośmiu ponumerowanych miejscach przy okrągłym stole, by żadnych dwóch panów nie siedziało obok siebie.

Szkic rozwiązania. Ponumerujmy oddzielnie panie i panów. Każdy ze sposobów posadzenia pięciu pań i trzech panów tak, aby były spełnione warunki zadania, można osiągnąć postępując wg następującej procedury:

1^o. Wybieramy miejsce dla pani nr 1 (8 sposobów);

2^o. Wybieramy kolejność, w jakiej na prawo od pani nr 1 będą siedziały pozostałe cztery panie, czyli tworzymy permutację liczb 2, 3, 4 i 5 (4! sposobów);

3^o. Tworzymy ciąg (p_1, p_2, p_3) numerów pań, które bezpośrednio na prawo od siebie bedą miały panów nr 1, nr 2 i nr 3 odpowiednio ($5 \cdot 4 \cdot 3$ sposobów).

Łącznie mamy $8 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ czyli 11 520 sposobów.

Zadania dodatkowe

Zadanie 13. Obliczyć, ile jest liczb pięciocyfrowych o cyfrach parami różnych.
Odpowiedź: 27 216.

Zadania domowe

Zadanie 14. Niech liczby naturalne k, m spełniają warunek $k \geqslant m$. Obliczyć liczbę sposobów takiego posadzenia k kobiet i m mężczyzn na $k+m$ miejscach przy okrągłym stole, by żadnych dwóch panów nie siedziało obok siebie.
Odpowiedź: Rozumując tak jak w rozwiązaniu zadania 12, wnioskujemy, że szukana liczba jest równa $(k + m) \cdot (k-1)! \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1)$.

Zadanie 15. Obliczyć liczbę sposobów rozdzielenia trzech medali (złotego, srebrnego i brązowego) pomiędzy sześciu zawodników.
Odpowiedź: 120.

2.4. Wariacje z powtórzeniami

Twierdzenie 4. *Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym. Każdą funkcję $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to A$ nazywamy k-wyrazową wariacją z powtórzeniami elementów zbioru A.*

Z powyższej definicji wynika, że k-wyrazowe wariacje z powtórzeniami elementów zbioru A to po prostu k-wyrazowe ciągi elementów zbioru A.

Twierdzenie 5. *Niech zbiory A i B mają odpowiednio m i n elementów. Liczba wszystkich funkcji $f : A \to B$ jest równa n^m.*

Zadania obowiązkowe

Zadanie 16. Na parterze dziesięciopiętrowego domu do windy wsiadło 8 osób. Obliczyć liczbę sposobów, na jakie osoby te mogą wysiąść z windy (pod uwagę bierzemy tu jedynie numery pięter, na których wysiadają poszczególne osoby).

Szkic rozwiązania. Ponumerujmy te osoby liczbami od 1 do 8. Szukana liczba sposobów jest równa liczbie 8-elementowych ciągów $(p_1, \ldots, p_8)$, gdzie dla każdego $k \in \{1, \ldots, 8\}$ wyraz p_k jest numerem piętra, na którym wysiada k-ta osoba. Ciągów takich jest 10^8.

Zadania dodatkowe

Zadanie 17. Obliczyć liczbę takich numerów tablic rejestracyjnych, które na początku mają dowolne trzy duże litery alfabetu łacińskiego (alfabet ten ma 26 liter), a następnie dowolne cztery cyfry.
Odpowiedź: 175 760 000.

Zadanie 18. Obliczyć liczbę sposobób takiego rozmieszczenia dziewięciu kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9 w trzech pudełkach ponumerowanych liczbami od 1 do 3, by spełniony był warunek:

a) pudełko nr 1 jest puste;

b) kula nr 1 jest w pudełku nr 1;

c) w pudełku nr 1 jest dokładnie jedna kula;

d) w pudełku nr 1 jest przynajmniej jedna kula;

e) w pudełku nr 1 jest co najwyżej jedna kula.

Uwagi metodologiczne. Każde z rozważanych rozmieszczeń można utożsamiać z 9-cio wyrazowym ciągiem numerów pudełek, w których znajdują się kolejne kule.
Odpowiedź: a) 2^9 (= 512); b) $1 \cdot 3^8$ (= 6561); c) $9 \cdot 2^8$ (= 2304); d) $3^9 - 2^9$ (= 19 171); e) $9 \cdot 2^8 + 2^9$ (= 2816).

Zadanie 19. Obliczyć liczbę sposobów takiego rozmieszczenia ośmiu ponumerowanych kul w pięciu ponumerowanych pudełkach, by liczba pustych pudełek była równa:

a) 4; b) 3; c) 2;

Odpowiedź: a) $\binom{5}{1}$ (= 5); b) $\binom{5}{2}(2^8 - 2)$ (= 2540); c) $\binom{5}{3}[3^8 - 3(2^8 - 2) - 3]$ (= 57 960).

Zadania domowe

Zadanie 20. Obliczyć liczbę sposobów rozmieszczenia siedmiu ponumerowanych kul w czterech ponumerowanych pudełkach.
Odpowiedź: 4^7 (= 16 384).

Zadanie 21. Obliczyć, ile jest liczb siedmiocyfrowych oraz ile spośród nich dzieli się przez 10.
Odpowiedź: $9 \cdot 10^6$ (= 9 000 000) oraz $9 \cdot 10^5$ (= 900 000).

Zadanie 22. Na każde z dziesięciu pytań pewnego testu można dać jedną z czterech odpowiedzi a, b, c i d. Obliczyć liczbę sposobów takiego wypełnienia tego testu, by odpowiedzi na dowolne dwa kolejne pytania były różne.
Odpowiedź: $4 \cdot 3^9$ (= 78 732).

2.5. Zadania różne

Zadania domowe

Zadanie 23. Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i dziesięciu panów utworzyć 10 nienumerowanych par tanecznych.
Odpowiedź: 10! (= 3 628 800).

Zadanie 24. Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i dziesięciu panów utworzyć 10 ponumerowanych par tanecznych.
Odpowiedź: $(10!)^2$ (= 13 168 189 440 000).

Zadanie 25. Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i trzynastu panów utworzyć 10 nienumerowanych par tanecznych.
Odpowiedź: $\binom{13}{3}10!$ (= $13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4$ = 1 037 836 800).

Zadanie 26. Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i trzynastu panów utworzyć 10 ponumerowanych par tanecznych.
Odpowiedź: $\binom{13}{3}(10!)^2$ (= 3 766 102 179 840 000).

3. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Teoria

Klasyczną definicję prawdopodobieństwa podał w roku 1812 Pierre Simon de Laplace.

Definicja 4. Niech Ω będzie N-elementowym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych. Wówczas prawdopodobieństwo $\mathrm{P}(A)$ dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża się wzorem

$$\mathrm{P}(A) \quad = \quad \frac{n}{N}, \tag{4}$$

gdzie n jest liczbą zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

Twierdzenie 6. *Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych. Dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzi równość*

$$P(A \cup B) \quad = \quad P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{5}$$

Uwaga 2. Przy obliczaniu prawdopodobieństwa zazwyczaj fundamentalną sprawą jest ustalenie, czy jako zdarzenia elementarne należy rozpatrywać ciągi elementów (permutacje, wariacje), czy zbiory elementów (kombinacje bez powtórzeń).

Zadania obowiązkowe

Zadanie 27. Rzucono dwa razy kostką do gry. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

A – suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 8,

B – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 12.

Obliczyć: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.

Szkic rozwiązania. Możemy przyjąć, że zdarzeniami elementarnymi są tu pary uporządkowane (k, l) liczb $k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, przy czym k jest liczbą oczek wyrzuconych w pierwszym rzucie, a l liczbą oczek wyrzuconych w drugim rzucie. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest tu równa 36 i wszystkie te zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Zachodzą równości:

$$\begin{aligned} A &= \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}, \\ B &= \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}, \\ A \cap B &= \{(2,6), (6,2)\}. \end{aligned}$$

Na mocy klasycznej definicji prawdopodobieństwa wynikają stąd równości:

$$P(A) = \frac{5}{36}, \qquad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Korzystając teraz z równości (5), otrzymujemy, że

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} - \frac{2}{36} = \frac{7}{36}.$$

Zadanie 28. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

A – brydżysta otrzymał w rozdaniu dokładnie 5 pików,
B – brydżysta otrzymał w rozdaniu dokładnie 2 asy.
Obliczyć:

a) $P(A)$; b) $P(B)$; c) $P(A \cap B)$; d) $P(A \cup B)$.

Szkic rozwiązania. Zdarzeniami elementarnymi są tu 13-elementowe podzbiory 52-elementowego zbioru kart do brydża. Zdarzenia te są jednakowo prawdopodobne, a ich liczba jest równa $\binom{52}{13}$.

Ad a). Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu A są takie 13-elementowe podzbiory talii kart do brydża, do których należy dokładnie 5 pików. Liczba tych podzbiorów jest równa iloczynowi liczby 5-elementowych kombinacji 13-elementowego zbioru pików przez liczbę 8-elementowych kombinacji 39-elementowego zbioru kart niebędących pikami. Zatem zdarzeniu A sprzyja $\binom{13}{5}\binom{39}{8}$ zdarzeń elementarnych i wobec tego zachodzi równość

$$P(A) = \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{8}}{\binom{52}{13}}. \tag{6}$$

Ad b). Rozumując podobnie jak poprzednio, uzyskujemy równość

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}. \tag{7}$$

Ad c). Należy tu obliczyć liczbę wszystkich takich 13-elementowych podzbiorów talii kart do brydża, do których należy dokładnie 5 pików i dokładnie dwa asy. Liczba takich podzbiorów, zawierających asa pik jest równa $\binom{12}{4}\binom{3}{1}\binom{36}{7}$, natomiast liczba takich, do których nie należy as pik, jest równa $\binom{12}{5}\binom{3}{2}\binom{36}{6}$. Zachodzi więc równość

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{12}{4}\binom{3}{1}\binom{36}{7} + \binom{12}{5}\binom{3}{2}\binom{36}{6}}{\binom{52}{13}}. \tag{8}$$

Ad d) Na mocy związku (5) z powyższych obliczeń wynikają równości:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{8}}{\binom{52}{13}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} - \frac{\binom{12}{4}\binom{3}{1}\binom{36}{7} + \binom{12}{5}\binom{3}{2}\binom{36}{6}}{\binom{52}{13}} \\ &= \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{8} + \binom{4}{2}\binom{48}{11} - \binom{12}{4}\binom{3}{1}\binom{36}{7} - \binom{12}{5}\binom{3}{2}\binom{36}{6}}{\binom{52}{13}}. \end{aligned}$$

Zadanie 29. Dla każdego $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ obliczyć prawdopodobieństwo p_k otrzymania przez brydżystę dokładnie k asów w rozdaniu. Wyniki przedstawić w postaci ułamków zwykłych i ułamków dziesiętnych.

Szkic rozwiązania. Mamy tu

$$p_0 = \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} = \frac{48!\,13!\,39!}{13!\,35!\,52!} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{9 \cdot 19 \cdot 37}{17 \cdot 25 \cdot 49} = \frac{6327}{20825},$$

$$p_1 = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{4 \cdot 48!\,13!\,39!}{12!\,36!\,52!} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{13 \cdot 19 \cdot 37}{17 \cdot 25 \cdot 49} = \frac{9139}{20825},$$

Podobnie uzyskujemy równości:

$$p_2 = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} = \frac{4446}{20825}, \qquad p_3 = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{10}}{\binom{52}{13}} = \frac{858}{20825}, \qquad p_4 = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} = \frac{55}{20825}.$$

Tabela wyników jest więc następująca:

k	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(A_k)$	$\frac{6327}{20825}$	$\frac{9139}{20825}$	$\frac{4446}{20825}$	$\frac{858}{20825}$	$\frac{55}{20825}$
$\mathrm{P}(A_k)$	0.3038	0.4388	0.2135	0.0412	0.0026

Zadanie 30. Z urny zawierającej 8 kul białych i 7 czerwonych wylosowano bez zwracania dwie kule. Obliczyć prawdopodobieństwo podanego zdarzenia. Wśród poniższych zdarzeń wskazać zdarzenia przeciwne i zdarzenia równe.

a) obie wylosowane kule są białe;
b) obie wylosowane kule są czerwone;
c) obie wylosowane kule są tego samego koloru;
d) obie wylosowane kule są różnych kolorów;
e) dokładnie jedna wylosowana kula jest biała;
f) dokładnie jedna wylosowana kula jest czerwona.

Odpowiedź: a) $\frac{4}{15}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{7}{15}$; d) $\frac{8}{15}$; e) $\frac{8}{15}$; f) $\frac{8}{15}$. *Uwaga.* Zdarzenia z podpunktów c) i d) są przeciwne, a zdarzenia z podpunktów d), e) i f) są równe.

Zadanie 31. Na $2n$ miejscach przy okrągłym stole losowo posadzono n kobiet i n mężczyzn. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że na żadnych dwóch sąsiadujących ze sobą miejscach nie usiadły osoby tej samej płci.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy przez A zdarzenie, o którym mówi zadanie i ponumerujmy kolejne miejsca przy stole liczbami od 1 do $2n$. Jasne jest, że $2n$ osób można posadzić przy stole na $(2n)!$ sposobów. Bowiem każdy z tych sposobów można utożsamiać z odpowiednią permutacją numerów osób. Permutacje te traktujemy jako zdarzenie elementarne. Rozpatrywane $2n$ osób można posadzić przy stole tak, by kobiety siedziały na miejscach o numerach parzystych, na $(n!)^2$ sposobów. Podobnie osoby te można posadzić tak, by kobiety siedziały na miejscach o numerach nieparzystych na $(n!)^2$ sposobów. Zatem zdarzeniu A sprzyja $2(n!)^2$ jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych. Zachodzą więc równości

$$P(A) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!} = 2\binom{2n}{n}^{-1}.$$

Zadania dodatkowe

Zadanie 32. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że karty otrzymane w rozdaniu przez brydżystę będą miały rozkład 4-3-3-3 (tzn. 4 karty będą w jednym z kolorów, a w każdym z trzech pozostałych kolorów będą po 3 karty).

Szkic rozwiązania. Przyjmijmy, że zdarzenia elementarne są tu takie jak w przykładzie 28 i oznaczmy rozpatrywane zdarzenie przez A. Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu A są 13-elementowe podzbiory zbioru kart mające rozkład 4-3-3-3. Aby znaleźć liczbę takich podzbiorów, obliczymy liczbę możliwych postępowań zgodnie z poniższą procedurą otrzymywania rozważanych podzbiorów.

Wybieramy wpierw kolor, który będą miały 4 karty (na $\binom{4}{1}$ sposobów) i losujemy 4 karty w tym kolorze (na $\binom{13}{4}$ sposobów). Następnie losujemy 9 kart – po 3 w każdym kolorze różnym od koloru wybranego na początku (na $\binom{13}{3}^3$ sposobów). Wylosowane w ten sposób 13 kart tworzy rozpatrywany podzbiór 13-elementowy. Wobec tego zachodzi równość

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{4}\binom{13}{3}^3}{\binom{52}{13}}$$

.

Zadanie 33. Na parterze 10-piętrowego budynku do windy wsiadło 6 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia, przyjmując, że dla każdej z tych sześciu osób losowy jest numer piętra, na którym ta osoba wysiądzie:

a) żadne dwie osoby nie wysiądą na tym samym piętrze;
b) każda osoba wysiądzie na piętrze o numerze parzystym;
c) każda z osób wysiądzie przynajmniej na trzecim piętrze.

Odpowiedź: a) 0.1512; b) $\frac{1}{64}$ (≈ 0.0156); c) $\frac{4^6}{5^6}$ (≈ 0.262).

Zadania domowe

Zadanie 34. Rzucamy jeden raz kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia:

a) wypadnie szóstka;
b) wypadnie parzysta liczba oczek;
c) wypadnie liczba oczek większa od 2;
d) wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą;
e) wypadnie liczba oczek będąca liczbą złożoną.

Odpowiedź: a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{3}$.

Zadanie 35. Spośród liczb 1, 2, ..., 40 wybrano losowo jedną liczbę. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

A – wylosowana liczba dzieli się przez 5,
B – wylosowana liczba dzieli się przez 3.
Obliczyć:

a) $P(A)$; b) $P(B)$; c) $P(A \cap B)$; d) $P(A \cup B)$.
Odpowiedź: a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{13}{40}$; c) $\frac{1}{20}$, d) $\frac{19}{40}$.

Zadanie 36. Rzucono dwa razy kostką do gry. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

A – suma liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą,
B – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą,
C – suma liczb wyrzuconych oczek jest większa od 7,
D – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest większy od 7,
S – liczby wyrzuconych oczek są dzielnikami liczby 6,
T – liczba oczek wyrzuconych za pierwszym razem jest mniejsza niż wyrzuconych za drugim razem.
Obliczyć:

a) $P(A)$;	b) $P(B)$;	c) $P(C)$;	d) $P(D)$;
e) $P(S)$;	f) $P(T)$;	g) $P(A \cap B)$;	h) $P(A \cap C)$;
i) $P(A \cap D)$;	j) $P(A \cap S)$;	k) $P(A \cap T)$;	l) $P(B \cap C)$;
ł) $P(B \cap D)$;	m) $P(B \cap S)$;	n) $P(B \cap T)$;	o) $P(C \cap D)$;

p) $P(C \cap S)$; q) $P(C \cap T)$; r) $P(D \cap S)$; s) $P(D \cap T)$;
t) $P(S \cap T)$.

Odpowiedź: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{12}$; d) $\frac{11}{18}$; e) $\frac{4}{9}$; f) $\frac{5}{12}$; g) $\frac{1}{4}$; h) $\frac{1}{4}$; i) $\frac{1}{3}$; j) $\frac{2}{9}$; k) $\frac{1}{6}$; l) $\frac{1}{3}$; ł) $\frac{1}{2}$; m) $\frac{1}{3}$; n) $\frac{1}{3}$; o) $\frac{5}{12}$; p) $\frac{5}{36}$; q) $\frac{1}{6}$; r) $\frac{1}{6}$; s) $\frac{1}{4}$; t) $\frac{1}{6}$.

Zadanie 37. Przy oznaczeniach z zadania 36 i korzystając z wyników zadania 36, obliczyć:
a) $P(A \cup B)$; b) $P(A \cup C)$; c) $P(A \cup D)$; d) $P(A \cup S)$;
e) $P(A \cup T)$; f) $P(B \cup C)$; g) $P(B \cup D)$; h) $P(B \cup S)$;
i) $P(B \cup T)$; j) $P(C \cup D)$; k) $P(C \cup S)$; l) $P(C \cup T)$;
ł) $P(D \cup S)$; m) $P(D \cup T)$; n) $P(S \cup T)$.

Odpowiedź: a) 1; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{7}{9}$; d) $\frac{13}{18}$; e) $\frac{3}{4}$; f) $\frac{5}{6}$; g) $\frac{31}{36}$; h) $\frac{31}{36}$; i) $\frac{5}{6}$; j) $\frac{11}{18}$; k) $\frac{13}{18}$; l) $\frac{2}{3}$; ł) $\frac{8}{9}$; m) $\frac{7}{9}$; n) $\frac{25}{36}$.

Zadanie 38. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że brydżysta otrzyma w rozdaniu dokładnie
a) dwa asy i jednego króla;
b) trzy asy i cztery króle
c) trzy asy i dwa króle i jedną damę;
d) dwa asy, trzy króle i cztery damy;
e) jednego asa, trzy króle i trzy damy;
f) jednego asa, dwa króle, cztery damy i trzy walety.

Odpowiedź: a) $\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{10}}{\binom{52}{13}}$; b) $\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{4}\binom{44}{6}}{\binom{52}{13}}$; c) $\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{40}{7}}{\binom{52}{13}}$;
d) $\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}\binom{40}{4}}{\binom{52}{13}}$; e) $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{3}^2\binom{40}{6}}{\binom{52}{13}}$; f) $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{4}\binom{4}{3}\binom{36}{3}}{\binom{52}{13}}$.

Zadanie 39. Obliczyć prawdopodobieńwstwo zdarzenia, że przy rzucie dwiema kostkami do gry suma liczb wyrzuconych oczek jest większa od ich iloczynu.
Odpowiedź: $\frac{11}{36}$.

4. Rozszerzenie zakresu pojęcia prawdopodobieństwa

Teoria

Umowa. Rodzinę wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru X oznaczamy przez $\mathcal{P}(X)$ (często używa się też oznaczenia 2^X).

Niech Ω będzie dowolnym niepustym zbiorem skończonym. Prawdopodobieństwem na przestrzeni Ω jest dowolna funkcja $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki:

(P_1) $\bigwedge_{A\subset\Omega} P(A) \geqslant 0$,

(P_2) $\bigwedge_{A,B\subset\Omega} \big(A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)\big)$,

(P_3) $P(\Omega) = 1$.

Elementy zbioru Ω nazywamy zdarzeniami elementarnymi, a podzbiory zbioru Ω nazywamy zdarzeniami. Wynika stąd, że każde zdarzenie jest zbiorem zdarzeń elementarnych.

Twierdzenie 7. *Niech $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ będzie dowolnym zbiorem n-elementowym i niech funkcja $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ spełnia warunki:*

(P 1) $P(\emptyset) = 0$,

(P 2) $\bigwedge_{k \in \{1,\dots,n\}} P(\{\omega_k\}) \geqslant 0$,

(P 3) $\sum_{k=1}^{n} P(\{\omega_k\}) = 1$.

(P 4) dla każdego m-elementowego podzbioru $A = \{\omega_{i_1}, \dots \omega_{i_m}\}$ zbioru Ω zachodzi równość

$$P(A) \quad = \quad \sum_{r=1}^{m} P(\{\omega_{i_r}\}) \tag{9}$$

Wtedy funkcja P jest prawdopodobieństwem.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 40. Na każdej ściance dwunastościanu foremnego zaznaczono pewną liczbę oczek. Liczby ścianek z podanymi liczbami oczek przedstawia poniższa tabela:

liczba oczek	1	2	3	4	5	6
liczba ścianek	1	1	3	4	1	2

Rzucamy jeden raz rozpatrywaną bryłą. Niech A_k dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu k oczek. Uzupełnić poniższą tabelę:

k	1	2	3	4	5	6
$P(A_k)$	$\frac{1}{12}$					$\frac{2}{12}$
$P(A_k)$	$\frac{1}{12}$					$\frac{1}{6}$

.

Korzystając z tej tabeli, obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia:
A – wypadnie parzysta liczba oczek;
B – wypadnie nieparzysta liczba oczek;
C – wypadnie liczba oczek większa od 2;
D – wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą;
S – wypadnie liczba oczek będąca liczbą złożoną;
T – wypadnie nieparzysta liczba oczek większa od 2.

Szkic rozwiązania. Ponieważ wyrzucenie dowolnych dwóch spośród dwunastu ścianek bryły jest jednakowo prawdopodobne, więc pełna tabela jest następująca

k	1	2	3	4	5	6
$P(A_k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$
$P(A_k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

.

Korzystając z faktu, że zdarzenia A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 i A_6 parami się wykluczają, otrzymujemy równości

$$P(A) = P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \frac{1}{12} + \frac{4}{12} + \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$$

oraz

$$P(B) = P(A_1 \cup A_3 \cup A_5) = P(A_1) + P(A_3) + P(A_5) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

Podobnie uzyskujemy równości:

$$P(C) = \frac{5}{6}, \qquad P(D) = \frac{5}{12}, \qquad P(S) = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad P(T) = \frac{1}{3}.$$

Uwagi metodologiczne. Można przyjąć, że w zadaniu tym następujące zdarzenia są elementarne:
ω_k – wypadnie k oczek ($k = 1, \ldots, 6$).
Wtedy $A_k = \{\omega_k\}$ i zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne.

Zadanie 41. Niech Ω będzie dowolnym niepustym zbiorem skończonym i niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na przestrzeni Ω. Korzystając z warunków (P 1)-(P 3), wykazać poniższy związek:

a) $P(\emptyset) = 0$;

b) jeżeli $A \subset B \subset \Omega$, to $P(A) \leqslant P(B)$;

c) jeśli $A \subset \Omega$, to $P(A) \leqslant 1$;

d) jeśli $A \subset \Omega$, to $P(A') = 1 - P(A)$;

e) dla dowolnych $A, B \subset \Omega$ zachodzi równość $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Szkic rozwiązania. Ad a). Oczywiście $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset)$. Ponieważ $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, więc na mocy warunku ($P_2$) zachodzi równość $P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$. Zatem $P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$. Stąd $P(\emptyset) = 0$.

Ad b). Załóżmy, że $A \subset B \subset \Omega$. Wtedy $B = A \cup (B \setminus A)$ i przy tym $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Na mocy warunku ($P_2$) zachodzi więc równość $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Stąd i z wynikającej z warunku (P_1) nierówności $P(B \setminus A) \geqslant 0$ wynika, że $P(A) \leqslant P(B)$.

Ad c). Jeśli $A \subset \Omega$, to z podpunktu b) oraz z warunku P_3 wynikają nierówności $P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$.

Ad d). Jeśli $A \subset \Omega$, to $A \cup A' = \Omega$. Ponieważ ponadto $A \cap A' = \emptyset$, więc z równości $P(A \cup A') = P(\Omega)$ wynika, że $P(A) + P(A') = 1$. Stąd $P(A') = 1 - P(A)$.

Ad e). Niech $A, B \subset \Omega$. Zachodzą wtedy równości $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ i $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$. Ponieważ ponadto prawdziwe są związki $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ i $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$, więc na mocy warunku P_2 z powyższych zależności wynikają równości $P(A \setminus B) + P(A \cap B) = P(A)$ i $P(A \setminus B) + P(B) = P(A \cup B)$. Stąd $P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B)$ i w rezultacie $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Zadanie 42. Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniają warunki: $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{1}{3}$ i $P(B) = \frac{1}{2}$. Obliczyć $P(A \cup B)$.
Odpowiedź: $\frac{11}{12}$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 43. Na jednej ściance kostki sześciennej zaznaczono jedno oczko, na dwóch zaznaczono po dwa oczka, a na trzech zaznaczono po trzy oczka. Niech ω_k dla $k = 1, 2, 3$ oznacza zdarzenie, że przy rzucie taką kostką wypadło k oczek. Uzupełnić poniższą tabelkę

k	1	2	3
$P(\{\omega_k\})$	$\frac{1}{6}$		

Przyjmijmy, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ jest przestrzenią zdarzeń elementarnych. Wypisać wszystkie zdarzenia będące podzbiorami przestrzeni Ω oraz obliczyć ich prawdopodobieństwa.

Odpowiedź:

k	1	2	3
$P(\{\omega_k\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

A	$\emptyset$	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$	Ω
$P(A)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1

Zadanie 44. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych i niech zachodzą równości:

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{8}, \quad P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{8}, \quad P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{2}.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia:

a) $A = \{\omega_1, \omega_2\}$; b) $B = \{\omega_2, \omega_4\}$; c) $C = \{\omega_3, \omega_4\}$;

d) $D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$; e) $K = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$; f) $L = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$.
Odpowiedź: a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{7}{8}$; f) $\frac{3}{4}$.

Zadanie 45. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}\}$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych przy czym $P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{10}$ dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) $A = \{\omega_1, \omega_2\}$; b) $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_7\}$; c) $C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8, \omega_{10}\}$.
Odpowiedź: a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{2}$.

Zadanie 46. Wykazać, że dla dowolnych $A, B \subset \Omega$ zachodzi równość $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$. Wywnioskować stąd, że jeśli ponadto $A \subset B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Zadanie 47. Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniają warunki $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ i $P(A \cup B) = 0,8$. Obliczyć:

a) $P(A \cap B)$; b) $P(A \setminus B)$; c) $P(A' \cap B)$.
Odpowiedź: a) $0,3$; b) $0,3$; c) $0,2$.

Zadania domowe

Zadanie 48. Wykazać, że dla dowolnych zdarzeń $A, B, C \subset \Omega$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} & P(A \cup B \cup C) = \\ = \ & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned} \tag{10}$$

Odpowiedź: Korzystając z praw rachunku zbiorów i z własności (**??**), otrzymujemy równości:

$$\begin{aligned} & P(A \cup B \cup C) \\ = \ & P((A \cup B) \cup C) \\ = \ & P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ = \ & P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ = \ & P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - [P((A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\ = \ & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Zadanie 49. Sprawdzić, czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniające warunki $P(A) = \frac{1}{2}$ i $P(B) = \frac{2}{3}$ mogą się wykluczać.
Odpowiedź: Nie.

Zadanie 50. Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniają warunki $P(A') = 0,6$, $P(B') = 0,7$ i $P(A \cap B) = 0,2$. Obliczyć $P(A \cup B)$.
Odpowiedź: $0,5$.

5. Prawdopodobieństwo warunkowe

Teoria

Definicja 5. Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń i niech zdarzenie $B \subset \Omega$ spełnia warunek $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem zdarzenia $A \subset \Omega$ pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B nazywamy liczbę $P(A|B)$ (czytaj: P od A pod warunkiem B) określoną wzorem

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{11}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 51. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia przynajmniej jednej szóstki przy dwóch rzutach kostką do gry pod warunkiem, że suma wyrzuconych liczb oczek jest większa od 8.

Szkic rozwiązania. Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest tu liczący 36 elementów zbiór par uporządkowanych (k, l), gdzie k i l są liczbami oczek wyrzuconych w pierwszym i drugim rzucie odpowiednio. Zdarzenia te są jednakowo prawdopodobne. Wprowadźmy oznaczenia zdarzeń:

A – przynajmniej jeden raz wypadła szóstka,
B – suma liczb wyrzuconych oczek jest większa od 8.

Łatwo można policzyć, że zdarzeniu $A \cap B$ sprzyja 7 zdarzeń elementarnych, a zdarzeniu B sprzyja 10 zdarzeń elementarnych. Wobec tego zgodnie z definicją prawdopodobieństwa warunkowego zachodzą równości:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{7}{10}.$$

Zatem $P(A|B) = \frac{7}{10}$.

Zadania domowe

Zadanie 52. Rzucamy jeden raz dwiema kostkami do gry. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:
A – suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 7,
B – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 6.
Obliczyć $\mathrm{P}(A|B)$ i $\mathrm{P}(B|A)$.
Odpowiedź: $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{2}$ i $\mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{3}$.

Zadanie 53. Z urny zawierającej 6 kul białych i 4 kule czarne wylosowano bez zwracania najpierw jedną, a potem drugą kulę. Wprowadźmy oznaczenia zdarzeń:
A – pierwsza kula była biała;
B – druga kula była biała.
Obliczyć:
a) $\mathrm{P}(B|A)$; b) $\mathrm{P}(B'|A)$; c) $\mathrm{P}(A|B)$; d) $\mathrm{P}(A'|B)$.
Odpowiedź: a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{4}{9}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $\frac{4}{9}$.

6. Prawdopodobieństwo całkowite

Teoria

Poniższe twierdzenie nosi nazwę twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Twierdzenie 8. *Niech $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, gdzie $P(B_i) > 0$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takich, że $i \neq j$. Wówczas zachodzi równość*

$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + \ldots + P(A|B_n)\,P(B_n). \tag{12}$$

Równość (12) nazywamy wzorem na prawdopodobieństwo całkowite. Można ją zapisać również w postaci

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i). \tag{13}$$

Zadania obowiązkowe

Zadanie 54. Detale z fabryk F_1, F_2, F_3 stanowią odpowiednio 45%, 35% i 20% zawartości magazynu. Wśród detali z tych fabryk jest 1%, 3% i 2,5% braków odpowiednio. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowany z magazynu detal jest wybrakowany.

Szkic rozwiązania. Wprowadźmy następujące oznaczenia zdarzeń:

A – wybrany detal jest wybrakowany,

B_1 – wybrany detal pochodzi z fabryki F_1,

B_2 – wybrany detal pochodzi z fabryki F_2,

B_3 – wybrany detal pochodzi z fabryki F_3.

Z treści zadania odczytujemy równości:

$$P(B_1) = \frac{45}{100},\ P(B_2) = \frac{35}{100},\ P(B_3) = \frac{20}{100},\ P(A|B_1) = \frac{1}{100},\ P(A|B_2) = \frac{3}{100}\ \text{ i }\ P(A|B_3) = \frac{2,5}{100}.$$

Zgodnie ze wzorem na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= \frac{1}{100}\cdot\frac{45}{100} + \frac{3}{100}\cdot\frac{35}{100} + \frac{2,5}{100}\cdot\frac{20}{100} = \frac{200}{10\,000} = \frac{1}{50}. \end{aligned}$$

Zadania dodatkowe

Zadanie 55. Zawartość urn I, II i III przedstawia tabela

	I	II	III
kule białe	4	5	5
kule czarne	8	7	5

Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko, to losujemy kulę z urny I, jeśli wypadną 2 lub 3 oczka, to losujemy kulę z urny II, a jeśli wypadną przynajmniej 4 oczka, to kulę losujemy z urny III. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy kulę białą.

Szkic rozwiązania. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

A – wylosowana kula będzie biała,

B_1 – kula będzie wylosowana z urny I,

B_2 – kula będzie wylosowana z urny II,

B_3 – kula będzie wylosowana z urny III.

Zgodnie ze wzorem (12) zachodzą równości:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + P(A|B_3)\,P(B_3) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2+5+9}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Zadania domowe

Zadanie 56. W pewnej uczelni 78% studentek i 88% studentów umie pływać. Studentki stanowią 60% studiujących w tej uczelni. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba studiująca w tej uczelni umie pływać.

Odpowiedź: $\frac{41}{50}$.

Zadanie 57. Z zawierającej 3 kule białe i 5 kul czarnych pierwszej urny wylosowano kulę i włożono ją do zawierającej 4 kule białe i 9 kul czarnych urny drugiej. Następnie z drugiej urny wylosowano jedną kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że kula ta jest biała.
Odpowiedź: $\frac{5}{16}$.

Literatura

1^o. Gerstenkorn T., Śródka T. – „Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa", PWN, 1974

2^o. Krysicki W. i inni – „Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach", PWN, 2007

3^o. Krzyśko M. – „Wykłady z teorii prawdopodobieństwa", Wydawnictwo UAM, 1997

4^o. Słowikowski S. - „Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa dla szkół średnich", WSiP, 1980

5^o. Stojanow J. i inni – „Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa", PWN, 1991