Funkcje trygonometryczne

Piotr Rzonsowski

Teoria

Definicja 1. **Sinusem** kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}.$$

Cosinusem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie α do przeciwprostokątnej

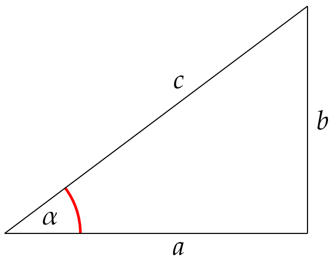
$$\cos\alpha = \frac{a}{c}.$$

Tangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do przyprostokątnej leżącej przy kącie α

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Cotangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie α do przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α

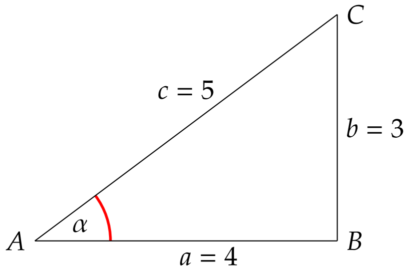
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$$



$\sin\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$

$\cos\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$

Przykład 1. Oblicz wartości funkcji sin, cos, tg, ctg, dla kąta α w trójkącie ABC.

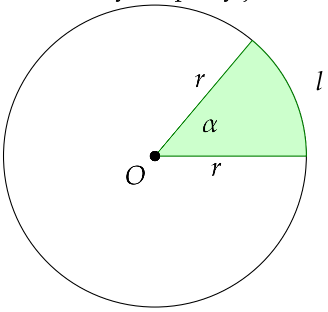


Korzystając ze wzorów dostajemy:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}$$

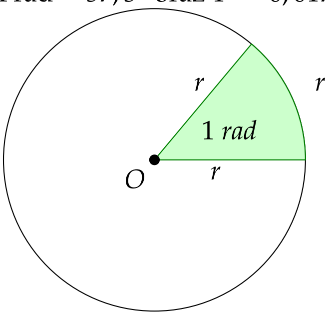
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$$

Definicja 2. **Miara łukowa** kąta środkowego w okręgu, to liczba równa stosunkowi długości łuku, na którym oparty jest ten kąt, do długości promienia okręgu



miara łukowa kąta α wynosi $\frac{l}{r}$.

Kąt o mierze łukowej 1 nazywamy **radianem**. 1 radian (w skrócie 1 rad), to miara kąta środkowego, który wycina z okręgu koła łuk o długości równej długości promienia okręgu. Zauważmy, że 1 rad $\approx 57,3°$ oraz $1° \approx 0,017$ rad



Definicja 3. Liczba π to stosunek długości okręgu do długości jego średnicy, jest wielkością stałą niezależną od promienia okręgu.

miara w stopniach	30°	45°	60°	90°	180°	360°
miara łukowa	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Uwaga 1. Wybrane wartości funkcji trygonometrycznych.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	brak
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	brak	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Uwaga 2. Poniżej podane są wartości liczby π, jakie pojawiały się w pracach uczonych świata.
— Babilończycy (ok. 2000 r. p.n.e.): $\pi \approx 3$

— Egipcjanie (ok. 2000 r. p.n.e.): $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,160493\ldots$
— Archimedes (III w. p.n.e.): $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3,14$
— Chiński matematyk Chang Hing (I w. n. e.): $\pi \approx \frac{142}{45} \approx 3,1555\ldots$
— hinduski matematyk Bhasakara (VII w. n.e.): $\pi \approx \frac{754}{240} \approx 3,1416666\ldots$
— włoski matematyk Leonardo Fibonacci (XIII w.): $\pi \approx \frac{864}{275} \approx 3,1415929$
— niemiecki matematyk Gottfried Wilhelm Leibniz (XVII w.): $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

Uwaga 3. Warto pamiętać, że miara łukowa małych kątów jest dobrym przybliżeniem wartości funkcji trygonometrycznych sin i tg, tzn. $\sin x \approx x$ oraz $\operatorname{tg} x \approx x$ dla dostatecznie małych x.

Przykład 2. Zamień miarę stopniową na miarę łukową dla kąta 40°.

Zanim zamienimy żądany kąt na radiany zastanówmy się, jak możemy to zrobić dla dowolnego kąta α. W tym celu ułóżmy proporcję

$$\begin{aligned} 180^\circ &- \pi \\ \alpha &- x \end{aligned}$$

Z powyższej proporcji dostajemy równanie

$$x \cdot 180^\circ = \alpha \cdot \pi$$

Dzieląc przez 180° dostajemy wzór na zamianę stopni na radiany:

$$x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$$

Korzystając z powyższego wzoru dostajemy

$$x = \frac{40^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2}{9}\pi$$

Zatem w radianach kąt jest równy $\frac{2}{9}\pi$.

Przykład 3. Zamień miarę łukową na miarę stopniową dla wartości $\frac{\pi}{10}$.

Korzystając ponownie z proporcji:

$$\begin{aligned} 180^\circ &- \pi \\ \alpha &- x \end{aligned}$$

i wyznaczając tym razem α dostajemy

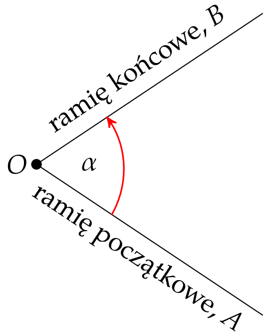
$$\alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}.$$

Z powyższego wzoru dostajemy

$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{10} \cdot 180^\circ}{\pi} = 18^\circ$$

Zatem miara w stopniach kąta jest równa 18°.

Definicja 4. **Kąt skierowany** jest to uporządkowana para półprostych o wspólnym początku. Pierwsza półprosta jest nazywana **ramieniem początkowym**, druga półprosta - **ramieniem końcowym**, wspólny początek półprostych nazywamy **wierzchołkiem kąta**.

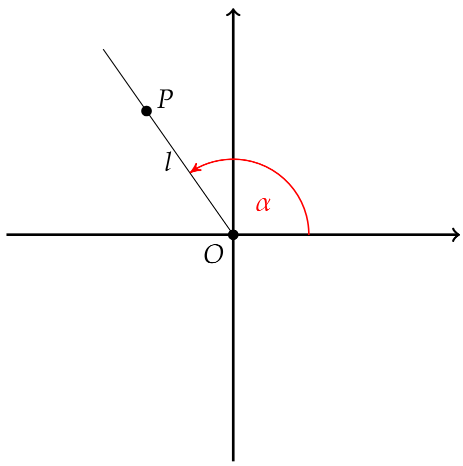


Kąt skierowany oznaczamy graficznie tak, jak to obrazuje rysunek (łuk kończy się strzałką, aby zaznaczyć ramię końcowe). Kąt skierowany oznaczamy następująco: $\overrightarrow{\sphericalangle AOB}$.

Mówimy, że dwa kąty skierowane α, β są równe gdy spełniony jest następujący warunek: każdy z tych kątów jest obrazem drugiego za pomocą pewnej translacji lub obrotu albo za pomocą złożenia tych dwóch przekształceń, przy czym w wyniku tych przekształceń ramię początkowe kąta β powinno się nałożyć na ramię początkowe kąta α, a ramię końcowe kąta β na ramię końcowe kąta α.

Kątem skierowanym przeciwnym do kąta $\overrightarrow{\sphericalangle AOB}$ jest kąt $\overrightarrow{\sphericalangle BOA}$ i każdy kąt równy temu kątowi.

Uwaga 4. Niech $P = (x, y)$ będzie dowolnym punktem na płaszczyźnie kartezjańskiej. Wtedy mamy jednoznacznie wyznaczoną półprostą l o początku w środku układu współrzędnych oraz przechodzącą przez punkt P. Ponieważ półprosta l jest wyznaczona jednoznacznie, to również jest jednoznacznie wyznaczony kąt skierowany α pomiędzy półosią dodatnią osi OX a półprostą l. Zauważmy, że miara kąta α nie zależy od wyboru punktu P na półprostej l i oczywiście należy do przedziału $[0, 2\pi)$.



Definicja 5. Niech $P = (x, y)$ będzie punktem, który odpowiada kątowi α z uwagi 4 oraz $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (odległość punktu P od środka układu współrzędnych). Wtedy funkcje trygonometryczne sinus, cosinus, tangens, cotangens kąta α definiujemy za pomocą następujących ilorazów:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}; \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ x \neq 0; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y},\ y \neq 0. \tag{1}$$

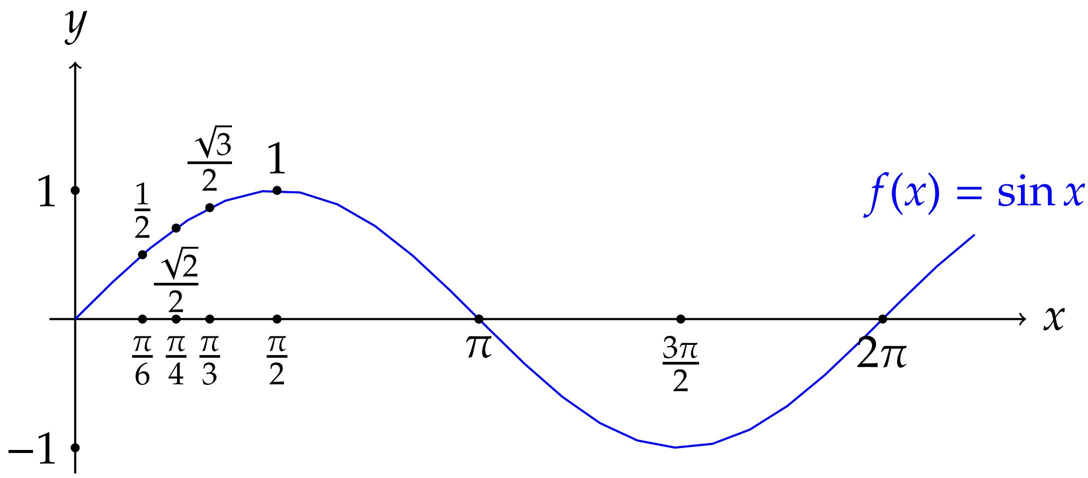
W ten sposób zdefiniowaliśmy cztery funkcje trygonometryczne dla kątów skierowanych o mierze łukowej od 0 do 2π rad, a więc funkcje, których argumentami są liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 2\pi]$.

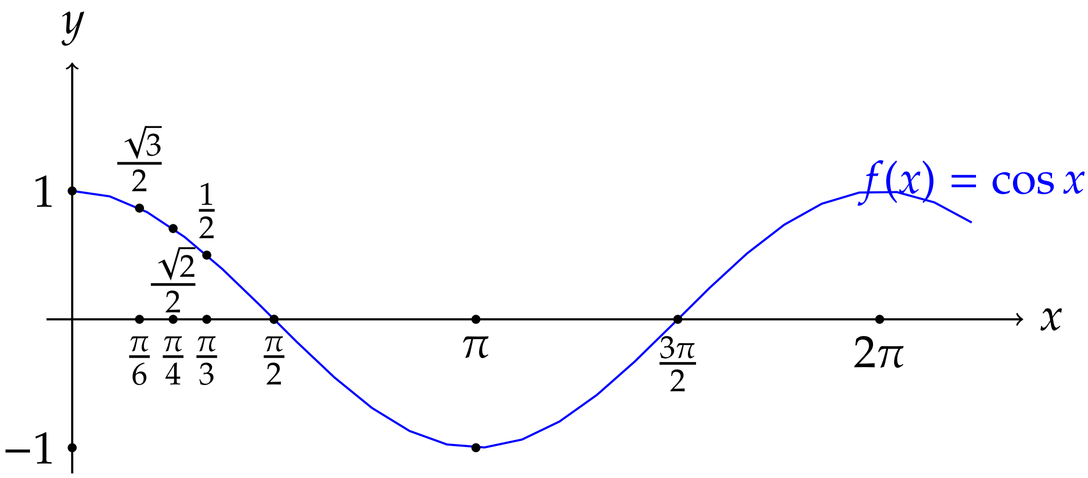
Zauważmy, że funkcja tangens nie jest zdefiniowana dla $x = 0$, zatem funkcja ta nie jest zdefiniowana, gdy ramię końcowe kąta leży na osi OY, czyli dla kątów $\frac{\pi}{2}$ rad i $\frac{3}{2}\pi$ rad. Natomiast cotangens nie jest określony dla $y = 0$, czyli gdy ramię końcowe leży na osi OX, stąd dostajemy, że cotangens jest niezdefiniowany dla kątów 0 rad i π rad.

Przez **kąt o mierze ujemnej** rozumieć będziemy kąt, w którym ruch od ramienia początkowego do ramienia końcowego odbywa się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, przy czym nadal ramię początkowe takiego kąta "leży" na dodatniej części osi OX, a wierzchołek kąta pokrywa się z początkiem układu współrzędnych. W ten sposób poszerza się zakres rozpatrywanych (miar) kątów skierowanych, a więc zakres argumentów funkcji trygonometrycznych do przedziału $[-2\pi, 2\pi]$.

Możliwe wartości miary łukowej kątów od $[-2\pi, 2\pi]$ możemy dalej poszerzyć do zbioru $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych, wykonując więcej niż jeden pełen obrót ramienia końcowego kąta w kierunku przeciwnym (dla kątów dodatnich) lub zgodnym (dla kątów ujemnych) do ruchu wskazówek zegara. Dla kąta o dowolnej mierze łukowej $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy funkcje trygonometryczne tak samo jak dla kąta od 0 do 2π, tzn. wybieramy punkt P leżący na ramieniu końcowym kąta α, a następnie korzystamy ze wzorów (1).

Wykresy sinusa i cosinusa:



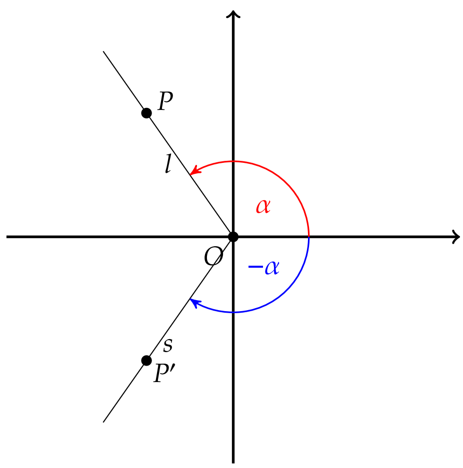


Animacja rysująca wykresy funkcji sinus i cosinus(do działania animacji wymagany jest Adobe Reader):

Uwaga 5. Z powyższej konstrukcji funkcji trygonometrycznej możemy określić następujące dziedziny i zbiory wartości

$$\begin{aligned}
&\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1], \\
&\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], \\
&\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}, \\
&\mathrm{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Uwaga 6. Zobaczmy, jakie są zależność między funkcjami trygonometrycznymi dla kąta α oraz $-\alpha$. Na początku zaznaczmy te kąty w układzie współrzędnych.

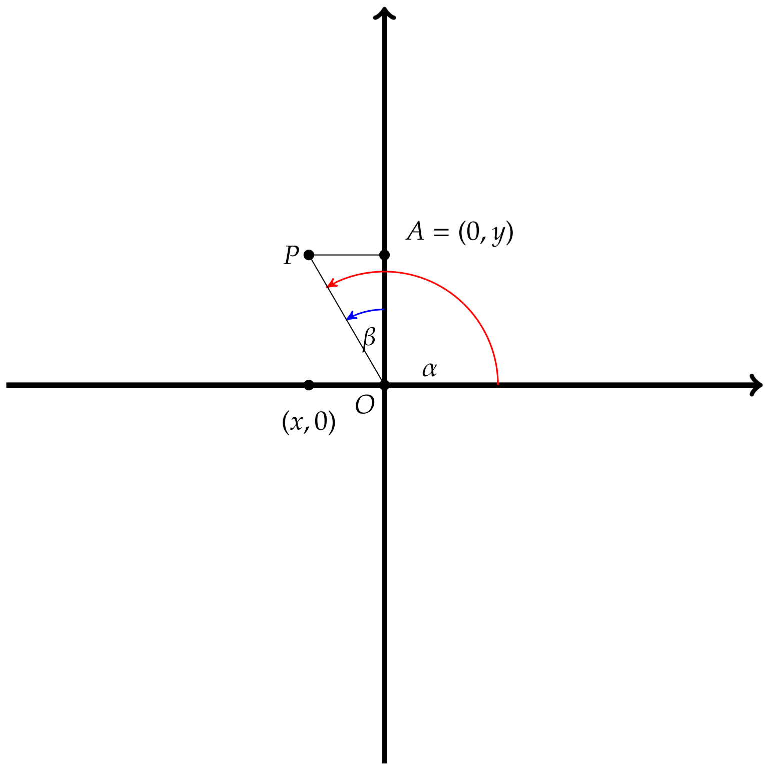


Ponieważ każdy punkt na półprostych l i s wyznacza dokładnie ten sam kąt, dlatego przyjmijmy, że punkty P, P' są oddalone od punktu O o długość jednej jednostki. Możemy zauważyć wtedy, że jeżeli punkt P ma współrzędne (x, y) to punkt $P' = (x, -y)$. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych dostajemy:

$$
\begin{aligned}
&-\sin(\alpha) = -\frac{y}{1} = \frac{-y}{1} = \sin(-\alpha),\\
&\cos(\alpha) = \frac{x}{1} = \cos(-\alpha),\\
&-\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{y}{x} = \frac{-y}{x} = \operatorname{tg}(-\alpha),\\
&-\operatorname{ctg}(\alpha) = -\frac{x}{y} = \frac{x}{-y} = -\operatorname{ctg}(-\alpha).
\end{aligned}
$$

Uwaga 7. Zastanówmy się w jaki sposób znając jedynie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów z przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$ można odczytywać wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnego kąta.

Zacznijmy od sporządzenia rysunku.



Zauważmy, że w ten sposób powstał trójkąt prostokątny OAP oraz mamy następującą zależność między kątami: $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$. Możemy więc obliczyć wartość $\sin\beta$ w trójkącie prostokątnym , tzn. $\sin\beta = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Następnie z własności wartości bezwzględnej i definicji funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta dostajemy:

$$\sin\beta = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\cos\alpha$$

Zatem w celu obliczenia cosinusa kąta α z przedziału $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ wystarczy obliczyć wartość sinusa dla kąta $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Dla przykładu obliczmy wartość $\cos\frac{3}{4}\pi$, ponieważ $\frac{3}{4}\pi$ mieści się w powyższym przedziale, dlatego możemy skorzystać ze wzoru, który wyprowadziliśmy:

$$\cos\frac{3}{4}\pi = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Korzystając z podobnych argumentów możemy wyprowadzić wzory dla kątów z każdej ćwiartki. Nazywamy je **wzorami redukcyjnymi**

	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		IV ćwiartka	
φ	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin\varphi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Wybrane tożsamości trygonometryczne.

— $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
— $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
— $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
— $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$;
— $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;
— $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;
— $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
— $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;
— $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
— $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;
— $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
— $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
— $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$;
— $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
— $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
— $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
— $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
— $|\sin\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;
— $|\cos\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;
— $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{1-\cos x}{\sin x}$;
— $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x = \frac{1+\cos x}{\sin x}$.

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Zamień miarę stopniową na łukową dla podanych kątów:

a) $75°$, b) $270°$,

Zadanie 2. Zamień miarę łukową na stopniową dla poniższych kątów:

a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{16}$,

Zadanie 3. Punkt $(1, 0)$ obracamy wokół początku układu współrzędnych o kąt α. Znajdź współrzędne punktu P, który otrzymamy, gdy kąt ten jest równy:

a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{4}$,

Zadanie 4. Znajdź najmniejszy kąt dodatni o jaki należy obrócić punkt $P = (1, 0)$ wokół początku układu współrzędnych, aby otrzymać punkty:

a) $B = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, b) $C = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Zadanie 5. Korzystając z poniższych informacji obliczyć wartości funkcji $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.
a) $\cos x = -\frac{3}{4}$ oraz $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$,
b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ oraz $x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

Zadanie 6. Wartość podanego wyrażenia jest liczbą dodatnią czy ujemną? Rozwiązać jeden z poniższych przykładów.

a) $\sin 547° \cos 421° \operatorname{tg} 123°$ b) $\frac{\cos(-153°)}{\sin 179°}$

c) $\sin 348° - \operatorname{ctg} 909° + \cos 269°$ d) $\frac{\operatorname{tg}(-301°) \sin 1304°}{\cos 192° \operatorname{ctg}(-271°)}$

Zadanie 7. Obliczyć:
a) $\sin 75°$;
b) $\cos 105°$;
c) $\operatorname{tg} 15°$.

Zadanie 8. Korzystając ze wzoru $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, uzasadnij wybraną tożsamość trygonometryczną:
a) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;
b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
c) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Zadanie 9. Sprawdzić tożsamości trygonometryczne:
a) $\sin 7x \operatorname{tg} 3,5x + \cos 7x = 1$
b) $\sin^2(\frac{7\pi}{2} - x) + \frac{1-\cos x}{2} - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$;.

Zadanie 10. Zamień miarę stopniową na łukową dla podanych kątów:

a) 60°, b) 30°,
c) 45°, d) 5°.

Zadanie 11. Zamień miarę łukową na stopniową dla poniższych kątów:

a) $\frac{5}{6}\pi$, b) $\frac{5}{4}\pi$,
c) $\frac{11}{20}\pi$, d) $\frac{2}{9}\pi$.

Zadanie 12. Punkt $(1, 0)$ obracamy wokół początku układu współrzędnych o kąt α. Znajdź współrzędne punktu P, który otrzymamy, gdy kąt ten jest równy:

a) $\frac{2}{3}\pi$, b) $\frac{5}{4}\pi$,
c) $\frac{11}{6}\pi$, d) $\frac{3}{2}\pi$.

Zadanie 13. Uzasadnić następujące tożsamości trygonometryczne:
a) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$;
b) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$;
c) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Zadanie 14. Uzasadnić następujące tożsamości trygonometryczne:
a) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
b) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
c) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
d) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Zadanie 15. Uzasadnić następujące tożsamości trygonometryczne:
a) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$;
b) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} - \cos x + 1$;
c) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$;

Zadanie 16. Oblicz:
a) $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cdots + \sin 358^\circ + \sin 359^\circ$;
b) $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cdots + \cos 178^\circ + \cos 179^\circ$.

Zadania domowe

Zadanie 17. Zamienić miarę stopniową na łukową dla kątów:

a) 5°, b) -300°,
c) 20°, d) -272°.

Zadanie 18. Zamienić miarę łukową na stopniową dla kątów:

a) $\frac{3}{4}\pi$, b) $-\frac{12}{5}\pi$,

c) 10π, d) $-\frac{1}{180}\pi$.

Zadanie 19. Określić znak każdej z funkcji trygonometrycznych dla kątów:

a) $\frac{10}{3}\pi$, b) $-\frac{4}{3}\pi$.

Zadanie 20. Obliczyć, korzystając ze wzorów redukcyjnych oraz okresowości funkcji trygonometrycznych:

a) $\sin\frac{3}{2}\pi$, b) $\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi$,

c) $\operatorname{ctg}(-\frac{23}{4}\pi)$, d) $\cos\frac{407}{6}\pi$.

Zadanie 21. Podane liczby uporządkować rosnąco

a) $a = \cos 0$, $b = \cos 1$, $c = \cos\frac{\pi}{3}$, $d = \cos\pi$;

b) $a = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$, $b = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$, $c = \operatorname{ctg} 3$, $d = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

Literatura

— M. Kurczab, E. Kurczab, E.Świda, Matematyka Podręcznik do liceów i techników klasa 1, Oficyna Edukacyjna, 2010.

— M. Kurczab, E. Kurczab, E.Świda, Matematyka Zbiór zadań do liceów i techników klasa 1, Oficyna Edukacyjna, 2010.

— M. Braun, M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech, E. Zamościńska,Matematyka II Zbiór zadań dla liceum i technikum, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2005.

— N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z matematyki dla kl. I i II liceum ogólnokształcącego, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1994.

Wskazówki

1. Skorzystaj ze wzoru $x = \frac{\alpha\cdot\pi}{180^\circ}$. **2.** Skorzystaj ze wzoru $\alpha = \frac{x\cdot 180^\circ}{\pi}$. **3.** Narysuj półprostą nachyloną do dodatniej półosi OX pod kątem α, a następnie zaznacz na niej punkt w odległości 1 od środka układu współrzędnych i skorzystaj z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. **5.** Skorzystaj z jedynki trygonometrycznej i sprawdź jaki znak przymuje funkcja sin oraz cos w odpowiednich ćwiartkach. **6.** Skorzystaj z okresowości funkcji trygonometrycznej ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$-2π; $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$- π), a następnie określ znak funkcji w przedziale $[0, 2\pi)$ **7.** Skorzystaj z wzorów na $\sin(\alpha \pm \beta)$ oraz $\cos(\alpha \pm \beta)$. **8.** Skorzystaj z parzystości i nieparzystości funkcji sin, cos oraz wzorów redukcyjnych. **9.** Skorzystaj z wzorów które znajdują się na końcu części z teorią. **10.** Skorzystaj ze wzoru $x = \frac{\alpha\cdot\pi}{180^\circ}$. **11.** Skorzystaj ze wzoru $\alpha = \frac{x\cdot 180^\circ}{\pi}$. **12.** Narysuj półprostą nachyloną do półosi OX pod kątem α, a następnie zaznacz na niej punkt w odległości 1 od środka układu współrzędnych i skorzystaj z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. **13.** a) Rozpisać prawą stronę(zamienić $\operatorname{tg}\alpha$ na iloraz $\sin\alpha/\cos\alpha$) a następnie skorzystać z wzorów na $\sin\alpha \pm \beta$, $\cos\alpha \pm \beta$. Dla podpunktów b i c skorzystaj z a. **14.** Skorzystaj z podstawienia $\alpha = u + v$, $\beta = u - v$. **16.**

a) Korzystamy z wzoru $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ i sumujemy skrajne elementy,

b) Korzystamy z wzoru $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ i sumujemy skrajne elementy

17. Skorzystaj ze wzoru $x = \frac{\alpha\cdot\pi}{180^\circ}$. **18.** Skorzystaj ze wzoru $\alpha = \frac{x\cdot 180^\circ}{\pi}$. **19.** Narysuj wykres funkcji $\sin x$ oraz $\cos x$, a następnie skorzystaj z okresowości funkcji trygonometrycznych. **21.** Skorzystaj z monotoniczności funkcji trygonometrycznych w odpowiednich przedziałach.

Odpowiedzi

1. a) $\frac{5}{12}\pi$ rad, b) $\frac{3}{2}\pi$ rad **2.** a) 30°, b $11,25^\circ$, **3.** a) $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, b) $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, **4.** a) $\alpha = \frac{7}{4}\pi = 315^\circ$, b) $\alpha = \frac{4}{6}\pi = 120^\circ$. **5.** a) $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos x = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$, b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ **6.** a) +, b) -, c) -, d) + **7.** a) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$, b) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$, c) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. **9.** a) Tak, b) Nie **10.** a) $\frac{\pi}{3}$ rad, b) $\frac{\pi}{6}$ rad, c) $\frac{\pi}{4}$ rad, d) $\frac{\pi}{36}$ **11.** a) 150°, b) 225°, c) 99°, d) 40° **12.** a) $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, b) $P = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, c) $P = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, d) $P = (0,1)$ **15.** a) Tak, b) Tak, c) Tak **16.** a) 0, b) 0 **17.** a) $\frac{1}{36}\pi$, b) $-\frac{5}{3}\pi$, c) $\frac{1}{9}\pi$, d) $-\frac{68}{45}\pi$ **18.** a) 135°, b) -432°, c) 1800°, d) -1° **19.** a) $\sin\frac{10}{3}\pi < 0$, $\cos\frac{10}{3}\pi < 0$, $\operatorname{tg}\frac{10}{3}\pi > 0$, $\operatorname{ctg}\frac{10}{3}\pi > 0$, b) $\sin(-\frac{4}{3}\pi) > 0$, $\cos(-\frac{4}{3}\pi) < 0$, $\operatorname{tg}(-\frac{4}{3}\pi) < 0$, $\operatorname{ctg}(-\frac{4}{3}\pi) < 0$. **20.** a) -1, b) -1, c) 1, d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **21.** a) $d < c < b < a$, b) $c < d < b < a$.